On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par $z_0 = 1 - \mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par $z_{n+1} = \dfrac{\overline{z_n} - \mathrm{i}\,|z_n|}{4}$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n = a_n + \mathrm{i}\, b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.
2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1}{4}$ et $b_1 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{4}$.
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A et B des nombres réels
	K et N des nombres entiers
Initialisation :	Affecter à A la valeur 1
	Affecter à B la valeur – 1
Traitement :	Entrer la valeur de N
	Pour K variant de 1 à N
	Affecter à B la valeur $\dfrac{-\mathrm{B} + \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}{4}$
	Affecter à A la valeur $\dfrac{\mathrm{A}}{4}$
	FinPour
Sortie :	Afficher A

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 3. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		
3		

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
2. Quelle est la nature de la suite (a_n) ? En déduire l'expression de a_n en fonction de n, et déterminer la limite de (a_n).
3. *a*. On admet que pour tous nombres complexes z et z' : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Montrer que pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}\,|z_n|$

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \sqrt{2}$.

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|b_n| \leq u_n$. En déduire que la suite (b_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

d. Interpréter géométriquement les résultats.

CORRECTION

Partie A

1. $z_0 = 1 - \text{i}$ donc $a_0 = 1$ et $b_0 = -1$

2. $z_1 = \dfrac{\overline{1-\text{i}} - \text{i}|1-\text{i}|}{4}$ or $|1-\text{i}| = \sqrt{2}$ donc $z_1 = \dfrac{1+\text{i}-\text{i}\sqrt{2}}{4} = \dfrac{1}{4} + \text{i}\,\dfrac{1-\sqrt{2}}{4}$ donc $a_1 = \dfrac{1}{4}$ et $b_1 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{4}$.

3. *a*.

K	A	B
1	0,25	0,6036
2	0,0625	0,0124
3	0,0156	0,0128

b. $z_{n+1} = \dfrac{\overline{z_n} - \text{i}|z_n|}{4} = \dfrac{a_n - \text{i}\,b_n + \text{i}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{4} = \dfrac{a_n}{4} + \text{i}\,\dfrac{-b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{4}$

donc $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4}$ et $b_{n+1} = \dfrac{-b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{4}$, l'algorithme permet donc de calculer pour N donné, a_N et b_N.

Partie B

1. $z_{n+1} = \dfrac{\overline{z_n} - \text{i}|z_n|}{4} = \dfrac{a_n - \text{i}\,b_n + \text{i}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{4} = \dfrac{a_n}{4} + \text{i}\,\dfrac{-b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{4}$

donc $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4}$ et $b_{n+1} = \dfrac{-b_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{4}$

2. $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4}$ donc la suite (a_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ de premier terme $a_0 = 1$.

$a_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

3. *a*. On admet que pour tous nombres complexes z et z' : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

D'après l'inégalité triangulaire : $|z_{n+1}| \leq \dfrac{1}{4}\left(|\overline{z_n}| + |\text{i}\,|z_n||\right)$

$|\overline{z_n}| = |z_n|$ et $|\text{i}| = 1$ donc $|z_{n+1}| \leq \dfrac{1}{4}\left(|z_n| + |z_n|\right)$ soit pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|z_n|$

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

Initialisation : $|z_0| = \sqrt{2}$ et $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$ donc $u_0 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 \sqrt{2}$.

Hérédité : montrons pour tout n de N, que si $u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \sqrt{2}$ alors $u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \sqrt{2}$.

pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|z_n|$ soit $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$ or par hypothèse $u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \sqrt{2}$ donc $\dfrac{1}{2}u_n \leq \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \sqrt{2}$

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$$

$$\frac{1}{2}u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\sqrt{2}$$

donc $u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \sqrt{2}$.

La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout naturel n, $u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \sqrt{2}$.

$u_n = |z_n|$ donc $u_n \geq 0$ donc pour tout naturel n, $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \sqrt{2}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \sqrt{2}$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. La suite (u_n) converge vers 0.

c. $u_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ or $a^2{}_n + b^2{}_n \geq b^2{}_n$ donc $u_n \geq \sqrt{b_n^2}$ soit, pour tout entier naturel n, $|b_n| \leq u_n$.
pour tout entier naturel n, $0 \leq |b_n| \leq u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} |b_n| = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$

d. Interpréter géométriquement les résultats.

Soit la suite de points (M_n) d'affixe z_n, définie par $z_0 = 1 - \mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par $z_{n+1} = \dfrac{\overline{z_n} - \mathrm{i}|z_n|}{4}$.
D'après les résultats précédents, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$ donc la suite de points (M_n) tend vers O origine du repère.