Nouvelle-Calédonie novembre 2008

EXERCICE 1 3 points Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(3\,;-2\,;1)\quad B(5\,;2\,;-3)\quad C(6\,;-2\,;-2)\quad D(4\,;3\,;2)$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

2. *a.* Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;1\,;2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire une équation du plan (ABC).

c. Montrer que la distance du point D au plan (ABC) est égale à 3.

3. Calculer le volume du tétraèdre ABCD en unités de volume.

EXERCICE 2 5 points Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2 + 2\,i$, $z_B = 2\,i$ et $z_C = 2$ ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2.

La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que OH < OK. On note z_H et z_K les affixes respectives des points H et K,

a. Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.

b. Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.

c. Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que :

$$z_K = (2\sqrt{2}+2)\,e^{i\frac{\pi}{4}},\; z_H = (2\sqrt{2}-2)\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -\frac{4}{z}.$$

2. *a.* Déterminer et placer les points images de B et C par f.

b. On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image. Déterminer les points invariants par f.

3. *a.* Montrer que pour tout point M distinct de O, on a : $OM \times OM' = 4$.

b. Déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$.

4. Soient K′ et H′ les images respectives de K et H par f.

a. Calculer OK′ et OH′.

b. Démontrer que : $z_{K'} = (2\sqrt{2}-2)\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{H'} = (2\sqrt{2}+2)\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

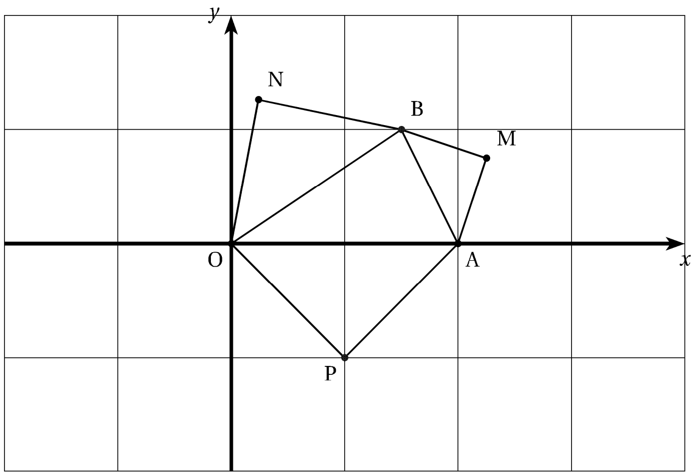
c. Expliquer comment construire les points K′ et H′ en utilisant uniquement la règle et le compas à partir des points K et H. Réaliser la construction.

EXERCICE 2 5 points Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 2 \text{ et } z_B = \frac{3}{2} + i.$$



On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-contre.

On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. À l'aide des transformations

a. Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2.

b. Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.

c. Justifier que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.

d. Quelle est l'image du point O par r ?

e. En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. En utilisant les nombres complexes

a. Donner les écritures complexes de s_1 et s_2. On utilisera les résultats de la question 1. *a*.

b. En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N.

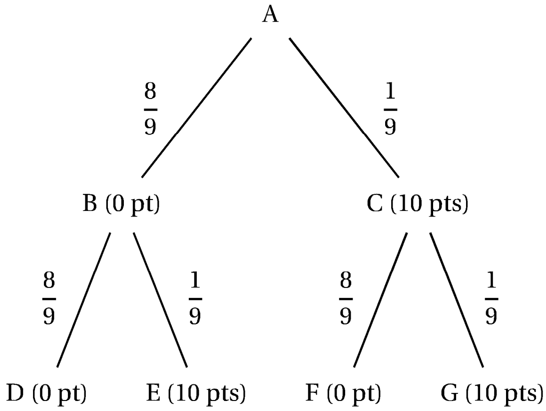
c. Donner, sans justification, l'affixe z_P du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.

On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passé par un noeud.

Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.



1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance de X.

c. Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.

2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes.

On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.

a. Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. On donnera le résultat arrondi au millième

b. Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \ln x - 2 + x$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

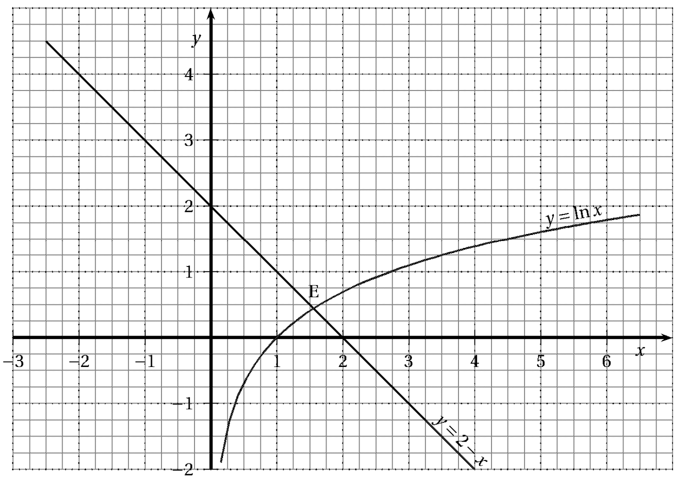
Donner un encadrement du nombre α à 10^{-2} près.

PARTIE B

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On considère sur le graphique ci-contre, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ln, ainsi que la droite D d'équation $y = 2 - x$.

On note E le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite D. On considère l'aire en unités d'aire, notée A, de la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et au dessous de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite D.



1. Déterminer les coordonnées du point E.

2. Soit $I = \int_1^{\alpha} \ln x \,\mathrm{d}x$.

a. Donner une interprétation géométrique de I.

b. Calculer I, en fonction de α, à l'aide d'une intégration par parties.

c. Montrer que I peut aussi s'écrire $I = -\alpha^2 + \alpha + 1$ sachant que $f(\alpha) = 0$.

3. Calculer l'aire A en fonction de α.

EXERCICE 5 3 points Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^{x}-1}$.

1. Restitution organisée de connaissances :

La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} g'(x) = g(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ g(0) = 1 \end{cases}$

Démontrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{h}-1}{h} = 1$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

PARTIE B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par : $u_n = \dfrac{1}{n}\left[1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}\right]$

1. Démontrer que $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} = \dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que $u_n = (e-1)\, f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. En déduire, en utilisant aussi la **PARTIE A**, que la suite (u_n) converge vers $e - 1$.

CORRECTION

EXERCICE 1 3 points Commun à tous les candidats

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (2 ; 4 ; – 4) et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (3 ; 0 ; – 3), les coordonnées ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.
$AB^2 = 2^2 + 4^2 + (-4)^2 = 36$; $AC^2 = 3^2 + 3^2 = 18$ et $BC^2 = 1^2 + (-4)^2 + 1^2 = 18$ donc BC = AC et $AB^2 = AC^2 + CB^2$ donc le triangle ABC est isocèle et rectangle en C.

2. *a.* $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 2\times 2 + 1\times 4 + 2\times(-4) = 0$ et $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 2\times 3 + 1\times 0 + 2\times(-2) = 0$ donc $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC) donc le vecteur $\vec{n}$ (2 ; 1 ; 2) est un vecteur normal au plan (ABC).

b. Une équation du plan (ABC) est $2x + y + 2z + d = 0$
A appartient au plan donc $2\times 3 - 2 + 2 + d = 0$ soit $d = -6$ donc une équation du plan (ABC) est $2x + y + 2z - 6 = 0$

c. La distance du point D au plan (ABC) est égale à $\dfrac{|a\,x_D + b\,y_D + c\,z_D + d\,|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|2\times 4 + 3 + 2\times 2 - 6|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \dfrac{9}{3} = 3$.

3. Le volume du tétraèdre ABCD est $\dfrac{1}{3}\times$ base $\times$ hauteur or l'aire du triangle ABC égale à $\dfrac{1}{2}\times CA\times CB = 9$ donc le volume du tétraèdre ABCD est en unités de volume $\dfrac{1}{3}\times 9\times 3$ soit 9 unités de volume.

EXERCICE 2 5 points Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *b.* $OA = |2 + 2\,i| = 2\sqrt{2}$, O, H, A et K sont alignés dans cet ordre donc $OH = OA - AH = 2\sqrt{2} - 2$ et OK = OA + AK
$OK = 2\sqrt{2} + 2$

c. $\arg(z_A) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) or les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires de même sens donc $\arg(z_K) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $\arg(z_H) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ donc $z_K = (2\sqrt{2} + 2)\,e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_H = (2\sqrt{2} - 2)\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. *a.* $-\dfrac{4}{2\,i} = 2\,i$ donc f(B) = B ; $-\dfrac{4}{2} = -2$ donc f(C) = C' symétrique de C par rapport à O.

b. M ≠ O, M est invariant par $f \Leftrightarrow z \neq 0$ et $z = -\dfrac{4}{z} \Leftrightarrow z \neq 0$ et $z^2 = -4 \Leftrightarrow z = 2\,i$ ou $z = -2\,i$

B et le symétrique de B par rapport à O sont invariants par f.

3. *a.* pour tout point M distinct de O, on a $z' = -\dfrac{4}{z}$ donc $z\,z' = -4$ donc $|z|\times|z'| = 4$ soit $OM \times OM' = 4$.

b. $z' = -\dfrac{4}{z}$ donc $\arg(z') = \arg(-4) - \arg(z) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) soit $\arg(z') = \pi - \arg(z) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

4. *a.* D'après la question **3. *a.*** OK′ OK = 4 et OH' × OH = 4donc $OK' \times (2\sqrt{2} + 2) = 4$ or $(2\sqrt{2} + 2)\times(2\sqrt{2} - 2) = 4$ donc $OK' = 2\sqrt{2} - 2 = OH$
$OH' \times (2\sqrt{2} - 2) = 4$ or $(2\sqrt{2} + 2)\times(2\sqrt{2} - 2) = 4$ donc $OH' = 2\sqrt{2} + 2 = OK$

b. $\arg(z_{K'}) = \pi - \arg(z_K)$ donc $\arg(z_{K'}) = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ donc $z_{K'} = (2\sqrt{2} - 2)\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$,
de même $\arg(z_{H'}) = \pi - \arg(z_H)$ donc $\arg(z_{H'}) = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ donc $z_{H'} = (2\sqrt{2} + 2)\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$,

c. $z_{K'}$ et $z_{H'}$ ont pour argument $\dfrac{3\pi}{4}$, donc K' et H' sont sur la demie droite D en vert sur le graphique. De plus $|z_{K'}| = |z_H| = 2\sqrt{2} - 2$ donc K' appartient aussi au cercle de centre O et rayon OH. De même H' appartient au cercle de centre O et rayon OK. D'où la construction des deux points.

EXERCICE 2 5 points Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1\. *a*. Le triangle AMB est un triangle rectangle isocèle en M donc MB = MA donc $AB^2 = 2\,MA^2$ soit $AB = \sqrt{2}\,AM$

s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B donc le rapport de s_1 est $\dfrac{AB}{AM} = \sqrt{2}$

L'angle de la similitude s_1 est $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

de même le triangle OBN est un triangle rectangle isocèle en N donc ON = BN donc $OB^2 = 2\,ON^2$ soit $OB = \sqrt{2}\,ON$

s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N donc le rapport de s_2 est $\dfrac{ON}{OB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

L'angle de la similitude s_2 est $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

1\. *b*. $r = s_2 \circ s_1$ donc $r(M) = s_2 \circ s_1(M) = s_2(B) = N$

Le triangle OPA est rectangle en P isocèle de sens direct donc : $OA = \sqrt{2}\,AP = \sqrt{2}\,OP$ et I est le milieu de OA donc $AI = OI = \dfrac{1}{2}OA$

soit $AI = OI = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{2}\,AP$ donc $AP = \sqrt{2}\,AI$ et $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AP}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ donc $s_1(I) = P$

et $OI = \dfrac{\sqrt{2}}{2}OP$ et $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OI}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ donc $s_2(P) = I$ donc $s_2 \circ s_1(I) = s_2(P) = I$

1\. *c*. La composée de deux similitudes directes est une similitude directe de rapport le produit des rapports et d'angle la somme des angles.

Le produit des rapports de s_2 et s_1 est 1 donc $s_2 \circ s_1$ est un déplacement (rotation ou translation) d'angle $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ donc est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Une rotation admet un seul point invariant et $s_2 \circ s_1(I) = I$ donc I est le centre de la rotation $s_2 \circ s_1$.

r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ de centre I.

1\. *d*. Le triangle OPA est rectangle en P isocèle de sens direct, I est le milieu de l'hypoténuse donc est le centre du cercle circonscrit au triangle OPA (IP = IO = IA) et le pied de la hauteur issue de P soit $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IP}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ donc $r(O) = P$

1\. *e*. $r(M) = N$ et $r(O) = P$ donc l'image de la droite (OP) par la rotation r est la droite (MN) et $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{MN}) = \dfrac{\pi}{2}$ donc les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. En utilisant les nombres complexes

a. s_1 a pour écriture complexe $z_1 - z_A = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_A)$ soit $z_1 = (1 + i)(z - 2) + 2$ donc $z_1 = (1 + i)z - 2i$

s_2 a pour écriture complexe $z_1 - z_O = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z - z_O)$ soit $z_1 = \dfrac{1}{2}(1 + i)z$

b. $s_1(M) = B$ donc $\dfrac{3}{2} + i = (1 + i)z_M - 2i$ donc $(1 + i)z_M = \dfrac{3}{2} + 3i = \dfrac{3}{2}(1 + 2i)$ soit $z_M = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{(1+2i)(1-i)}{2(1+i)(1-i)} = \dfrac{9+3i}{4}$

$s_2(B) = N$ donc $z_N = \dfrac{1}{2}(1 + i)\left(\dfrac{3}{2} + i\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{4}i$

c. $z_P = 1 - i$, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{PN}) = \arg\left(\dfrac{z_N - z_P}{z_M - z_O}\right)$ or $z_N - z_P = \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{4}i - (1 - i) = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{9}{4}i$

$\dfrac{z_N - z_P}{z_M - z_O} = \dfrac{-3+9i}{9+3i} = \dfrac{-1+3i}{3+i} = i$ donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{PN}) = \dfrac{\pi}{2}$ donc les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

On pouvait aussi calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{PN} = \dfrac{9}{4} \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{9}{4} = 0$ donc les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

Figure exercice 2
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

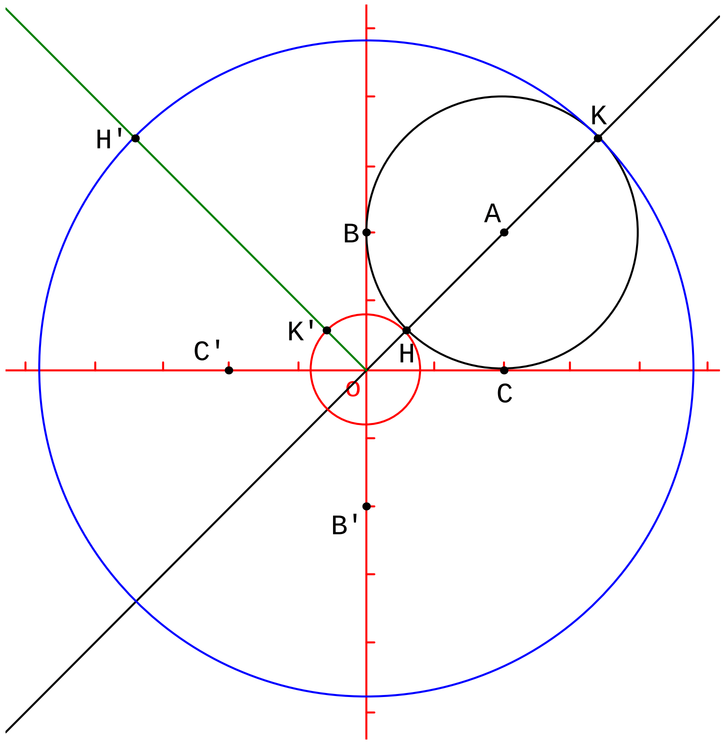
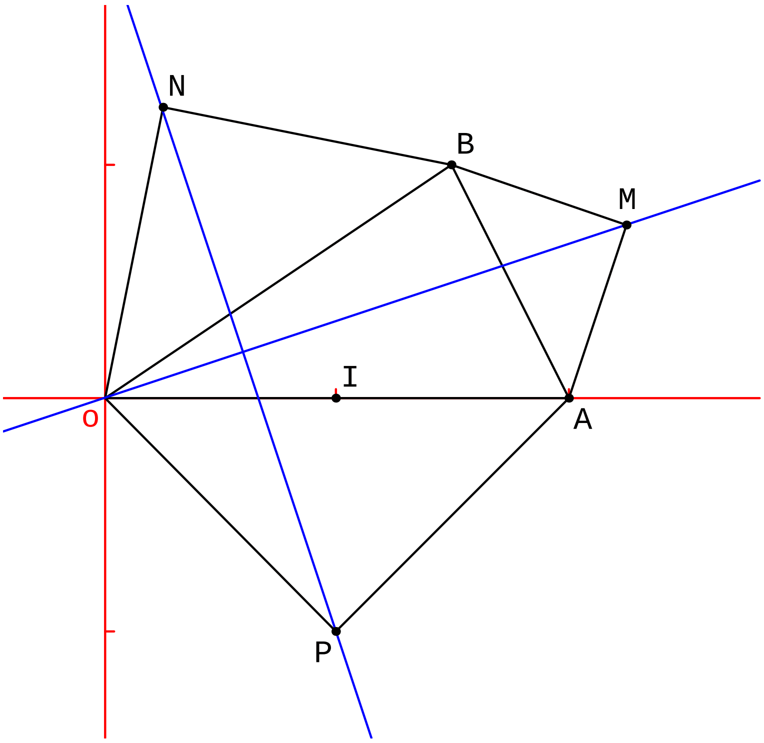


Figure exercice 2
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité



EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

1. *a.* Quatre trajets sont possibles :

P(ABD) = $\frac{8}{9}\times\frac{8}{9} = \frac{64}{81}$ le joueur gagne 0 point

P(ABE) = $\frac{8}{9}\times\frac{1}{9} = \frac{8}{81}$ le joueur gagne 10 points

P(ACF) = $\frac{8}{9}\times\frac{1}{9} = \frac{8}{81}$ le joueur gagne 10 points

P(ACG) = $\frac{1}{9}\times\frac{1}{9} = \frac{1}{81}$ le joueur gagne 20 points

X prend les valeurs 0 ; 10 ; 20 d'où la loi de probabilité de X :

x	0	10	20	Total
$p(\mathrm{X} = x)$	$\frac{64}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{1}{81}$	1
$x\, p(\mathrm{X} = x)$	0	$\frac{160}{81}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{180}{81}$

b. E(X) = $0 \times p(\mathrm{X} = 0) + 10 \times p(\mathrm{X} = 10) + 20 \times p(\mathrm{X} = 20)$ donc E(X) = $\frac{180}{81} = \frac{20}{9}$

c. Soit I l'événement : « la bille a suivi la branche AC » et J l'événement « le joueur a marqué 10 points » alors I $\cap$ J est l'événement « la bille a suivi la branche ACF »

$$p_{\mathrm{X}=10}(\mathrm{AC}) = \frac{p(\mathrm{AC} \cap (\mathrm{X}=10))}{p(\mathrm{X}=10)} = \frac{p(\mathrm{ACF})}{p(\mathrm{X}=10)} = \frac{\frac{8}{81}}{\frac{16}{81}} = \frac{1}{2}$$

2. *a.* On a une succession de 8 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

le joueur gagne cette partie ($p = \frac{1}{81}$)

le joueur ne gagne pas cette partie ($q = \frac{80}{81}$)

donc la variable aléatoire qui compte le nombre de parties gagnées suit une loi binomiale de paramètres (8 ; $\frac{1}{81}$).

$$p(\mathrm{X} = k) = \binom{8}{k}\left(\frac{1}{81}\right)^{k}\left(\frac{80}{81}\right)^{8-k}$$

$p(\mathrm{X} = 2) = 0{,}004$

b. $p(\mathrm{X} \geq 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) = 1 - 0{,}905 = 0{,}095$

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \ln x - 2 + x$.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$

$f(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} + 1\right) - 2$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. f est la somme de deux fonction ($x \to -2 + x$ et $x \to \ln x$) définies dérivables sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ donc f est définie dérivable sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

$f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ or $x > 0$ donc $f'(x) > 0$, f est strictement croissante sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3. f est définie continue strictement croissante sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$, $f(]\,0\,;+\infty\,[) = \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

Avec la calculatrice, on trouve $f(1{,}55) \approx -0{,}011$ et $f(1{,}56) \approx 0{,}004$ donc $1{,}55 \le \alpha \le 1{,}56$.

PARTIE B

1. E est le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite D donc son abscisse est solution de $\ln x = 2 - x$ soit de $f(x) = 0$ donc son abscisse est α et son ordonnée $2 - \alpha$. Les coordonnées du point E sont $(\alpha\,;2-\alpha)$.

2. Soit $I = \int_1^\alpha \ln x \, \mathrm{d}x$.

a. La fonction ln est positive sur $[\,\alpha\,;+\infty\,[$ donc I est une mesure de l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

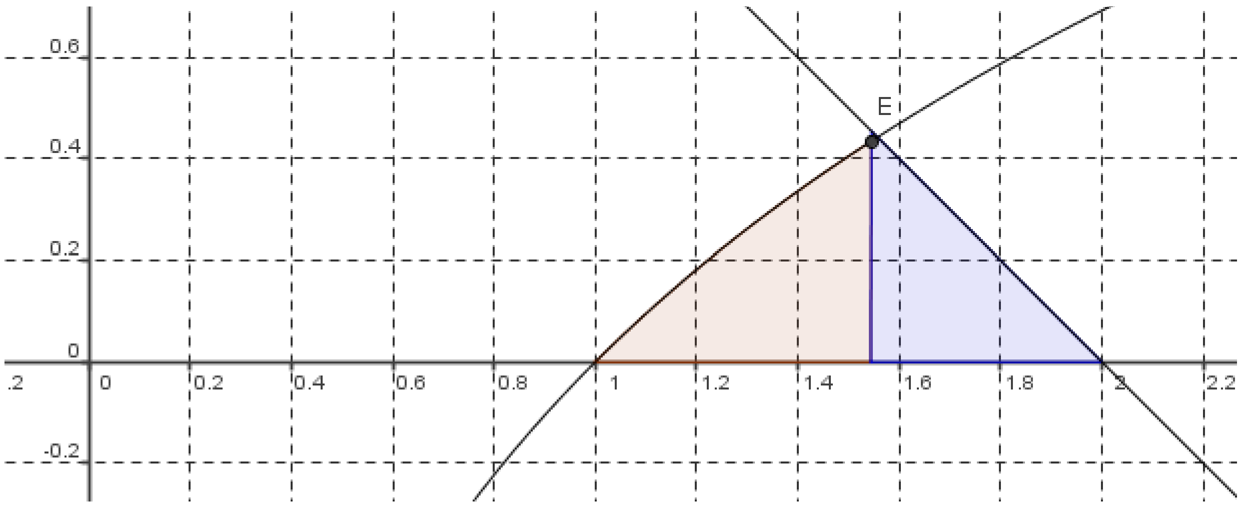
b. $\begin{cases} \text{Soit } u'(x) = 1 \quad \text{alors} \quad u(x) = x \\ \text{Soit} v(x) = \ln x \quad \text{alors} \quad v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ donc $I = \left[\, x\ln x \,\right]_1^\alpha - \displaystyle\int_1^\alpha x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\, x\ln x \,\right]_1^\alpha - \int_1^\alpha 1\,\mathrm{d}x$

$I = \alpha\ln\alpha - \left[\, x \,\right]_1^\alpha = \alpha\ln\alpha - (\alpha - 1) = \alpha\ln\alpha - \alpha + 1$.

c. $f(\alpha) = 0$.donc $\ln\alpha = 2 - \alpha$ donc $\alpha\ln\alpha = 2\alpha - \alpha^2$ donc $I = -\alpha^2 + \alpha + 1$.

3. $A = I + \displaystyle\int_\alpha^2 (2 - x)\,\mathrm{d}x = I + \left[\, 2x - \frac{1}{2}x^2 \,\right]_\alpha^2 = -\alpha^2 + \alpha + 1 + 2 - 2\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2$

$A = -\dfrac{1}{2}\alpha^2 - \alpha + 3$



EXERCICE 5 3 points Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. g est dérivable en 0 donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h)-g(0)}{h}$ = $g'(0)$ or $g'(0) = g(0)$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h)-g(0)}{h}$ = $g(0)$

or $g(x) = \mathrm{e}^{x}$ et $g(0) = 1$ donc en remplaçant dans $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h)-g(0)}{h}$ = $g(0)$, on obtient $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{h}-1}{h}$ = 1.

2. $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}}$ or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{h}-1}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

PARTIE B

1. Soit $q = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$, $q \neq 1$ donc $1+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\ldots+\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$

$$u_n = \frac{1}{n}\left[1+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\ldots+\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{1}{n}\times\frac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} = (1-\mathrm{e})\times\frac{\frac{1}{n}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} = (\mathrm{e}-1)\,f\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{n+\infty} \dfrac{1}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} u_n = \mathrm{e}-1$$

la suite (u_n) converge vers e − 1.