Polynésie juin 2016

Partie A

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$.

Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.

L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ 0,451.

2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0,95 ? Arrondir ce temps à la minute près.

3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître.

Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1. On choisit un adhérent au hasard. Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est 0,494.

2. On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ? Arrondir à 10^{-3} près.

Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une petite ville de 2 500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne pendant les nuits d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 habitants et obtient 54 avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne.

L'astronome fait l'hypothèse que 50 % de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne.

Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?

CORRECTION

Partie A

1. T suit une loi exponentielle de paramètre λ donc $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

$P(T \leq 3) = 1 - e^{-3\lambda} = 1 - e^{-0,6} = 0,451$

2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0,95 ? Arrondir ce temps à la minute près.

$P(T \leq t) \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} \geq 0,95 \Leftrightarrow \lambda t \geq \ln 0,05 \Leftrightarrow t \geq \dfrac{\ln 0,05}{-0,2}$

$\dfrac{\ln 0,05}{-0,2} \approx 1,4,98$ donc on doit attendre au moins 15 minutes

3. Le temps d'attente moyen entre deux apparitions d'étoiles filantes est $\dfrac{1}{\lambda}$ soit 10 minutes

En 10 minutes, on a en moyenne 10 étoiles filantes donc en deux heures le nombre moyen d'étoiles filantes lors de cette sortie est $\dfrac{120}{10} = 12$ étoiles filantes.

Partie B

Soit les événements : T : « l'adhérent a un télescope personnel » ;

N : « l'adhérent est un nouvel adhérent »

A : « l'adhérent est un ancien adhérent »

1. la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est $P(N \cap T) + P(A \cap T) = 0,64 \times 0,35 + 0,27 = 0,494$.

2. $P(T) = 0,494$ et $P(N \cap T) = 0,224$ donc $P_T(N) = \dfrac{P(T \cap N)}{P(N)}\ \dfrac{0,224}{0,494} \approx 0,453$

La probabilité que ce soit un nouvel adhérent sachant qu'il possède un télescope personnel est 0,453

Partie C

$n = 100$ donc $n \geq 30$, $p = 0,5$ donc $n\,p \geq 5$ et $n\,(1 - p) \geq 5$.

Les conditions sont vérifiées pour pouvoir utiliser un intervalle de fluctuation.

$I = \left[\ p - 1,96\sqrt{\dfrac{p\,(1-p)}{n}}\ ;\ p - 1,96\sqrt{\dfrac{p\,(1-p)}{n}}\ \right]$ donc I = [0,402 ; 0,598]

Dans l'échantillon utilisé, $f = 0,54$ donc $f \in I$ donc le résultat de ce sondage ne fera pas changer d'avis.