Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A = -1+\mathrm{i}\ ,\ z_B = 2\,\mathrm{i} \text{ et } z_C = 1+3\,\mathrm{i}$$

et D la droite d'équation $y = x + 2$.

1. Prouver que les points A, B et C appartiennent à la droite D.

Sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique, placer les points A, B, C et tracer la droite D.

2. Résoudre l'équation $(1+\mathrm{i})\,z+3-\mathrm{i}=0$ et vérifier que la solution de cette équation est l'affixe d'un point qui *n*'appartient pas à la droite D.

Dans la suite de l'exercice, on appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z différente de $-1+2\,\mathrm{i}$, fait correspondre le point M' d'affixe : $\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})\,z+3-\mathrm{i}}$

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite D.

3. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $(1+\mathrm{i})\,z+3-\mathrm{i}$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

b. Calculer les affixes des points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g des points A, B et C.

c. Déterminer l'image D_1 de la droite D par la transformation g et la tracer sur la figure.

4. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, fait correspondre le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

a. Déterminer les affixes des points $h(A_1)$, $h(B_1)$ et $h(C_1)$ et placer ces points sur la figure.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a : $\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow |z-2|=|z|$.

c. En déduire que l'image par h de la droite D_1 est incluse dans un cercle C dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.

d. Démontrer que tout point du cercle C qui est distinct de O est l'image par h d'un point de la droite D_1.

5. Déterminer l'image par l'application f de la droite D.

CORRECTION

1. D est la droite d'équation $y = x + 2$, les coordonnées de A, B et C vérifient cette relation donc les points A, B et C appartiennent à la droite D.

2. $(1+\mathrm{i})\,z+3-\mathrm{i}=0 \Leftrightarrow (1+\mathrm{i})\,z=-3+\mathrm{i} \Leftrightarrow (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})\,z=(-3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})$
$\Leftrightarrow 2\,z=-3+\mathrm{i}+3\,\mathrm{i}+1 \Leftrightarrow 2\,z=-2+4\,\mathrm{i} \Leftrightarrow z=-1+2\,\mathrm{i}$

Si $x=-1$ et $y=2$ alors $x+2=1$ donc $x+2\neq y$ donc la solution de cette équation est l'affixe d'un point qui *n*'appartient pas à la droite D.

3. *a.* L'écriture complexe de g est de la forme $z' = a\,z+b$ avec $a=1+\mathrm{i}$ et $b=3-\mathrm{i}$ donc g est une similitude directe de rapport $|a|=\sqrt{2}$ et d'angle arg a soit $\dfrac{\pi}{4}$.

Le centre de la similitude est l'unique point invariant donc son affixe est solution de $z=(1+\mathrm{i})\,z+3-\mathrm{i}$, donc $\mathrm{i}\,z=-3+\mathrm{i}$
soit $z=1+3\,\mathrm{i}$.
Le centre de la similitude est le point C d'affixe $1+3\,\mathrm{i}$.

b. A_1 a pour affixe $(1+\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})+3-\mathrm{i}$ soit $1-\mathrm{i}$
B_1 a pour affixe $(1+\mathrm{i})\times 2\,\mathrm{i}+3-\mathrm{i}$ soit $1+\mathrm{i}$
Le centre de la similitude est le point C donc $C_1 = C$ d'affixe $1+3\,\mathrm{i}$

c. Une similitude directe transforme une droite en une droite donc g transforme la droite (BC) en la droite (B_1C) d'équation $x = 1$.

4. *a.* $h(A_1)$ a pour affixe $\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$,

$h(B_1)$ a pour affixe $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$,

$h(C_1)$ a pour affixe $\dfrac{1}{1+3\,\mathrm{i}}=\dfrac{1-3\,\mathrm{i}}{10}$

b. pour tout nombre complexe non nul z, on a : $\left|\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\dfrac{2-z}{2\,z}\right|=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\dfrac{2-z}{z}\right|=1 \Leftrightarrow |2-z|=|z| \Leftrightarrow |z-2|=|z|$.

c. Soit E l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$.

M' $\in$ E $\Leftrightarrow$ il existe un point M (d'affixe z non nulle) appartenant à D tel que $z' = \dfrac{1}{z}$

La droite $\mathcal{D}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z-2| = |z|$

M' $\in$ E $\Leftrightarrow$ il existe un point M appartenant à D tel que $|z-2| = |z|$ et $z \neq 0$ donc $\left|\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ donc $|z' - 0{,}5| = 0{,}5$ soit DM' = 0,5

où D est le point d'affixe 0,5 donc M' appartient au cercle de centre D de rayon 0,5.
E est incluse dans le cercle de centre D de rayon 0,5.

d. Soit M un quelconque point du cercle C distinct de O
M $\in$ C donc $|Z - 0{,}5| = 0{,}5$ avec $Z \neq 0$

Soit M' le point d'affixe $z = \dfrac{1}{Z}$, donc $Z = \dfrac{1}{z}$

$|Z - 0{,}5| = 0{,}5 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow |z-2| = |z| \Leftrightarrow$ M' $\in \mathcal{D}_1$.

donc $h(\mathrm{D}_1)$ = E : cercle de centre D de rayon 0,5 privé de O.

5. $M(z) \xrightarrow[g]{} M_1(z_1) \xrightarrow[h]{} M'(z')$

$f = h \circ g$ or la droite $\mathcal{D}$ est transformé par g en $\mathcal{D}_1$
$\mathcal{D}_1$ est transformée par h en E donc l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$ est l'ensemble E soit le cercle de centre D de rayon 0,5 privé de O.