**ENONCE**

1 a) On pose . Démontrer que $1 + j + j^2 = 0$

*b*) Soit un triangle MNP du plan complexe. On note *m, n, p* les affixes des points M,N,P

Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :

- le triangle est équilatéral direct
- $\dfrac{n-p}{m-n} = j$
- $m + j\,n + j^2\,n = 0.$

2) Soit un triangle direct ABC.

On construit à l'extérieur de celui-ci ,les triangles directs BDC, CEA, AFB.

On note *d* , *e* , et *f* les affixes des points D, E , et F.

Démontrer que le triangle DEF a même centre de gravité que le triangle ABC

3) Soient G, H, K les centres de gravité respectifs des triangles BDC , CEA , AFB .

On note *g, h* et *k* les affixes des points G , H et K.

*a*) Démontrer que le triangle GHK est équilatéral direct.

*b*) Démontrer que le triangle GHK a même centre de gravité que le triangle ABC.

**CORRECTION**

1. *a* : On remarque que $j^3 = 1$ et que $1 - j^3 = (1+ j + j^2)(1 - j)$

Comme *j* est distinct de 1, on a bien $1 + j + j^2 = 0$

*b* : Le triangle MNP est équilatéral direct si et seulement si l'image de P par la rotation *r* de centre N et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ est M.

La forme complexe de cette rotation est : $z' = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - n) + n$

En particulier, MNP est équilatéral direct si et seulement si : $m - n = e^{\frac{i\pi}{3}}(p - n)$

ce qui donne : $\dfrac{n-p}{m-n} = -\,e^{-\frac{i\pi}{3}} = j$

De plus, dire que $m + j\,n + j^2\,p = 0$ revient à dire que : $m - (1+j^2)\,n + j^2p = 0$ car $1 + j + j^2 = 0$.

On obtient alors : $(m - n) = -\,j^2(p - n)$ ou encore : $\dfrac{n-p}{m-n} = \dfrac{1}{j^2} = j$ car $j^3 = 1$

On a donc bien équivalence entre les 3 propositions.

2. Appelons *a* , *b* , *c* les affixes respectives des points A, B, C.

Le centre de gravité du triangle ABC est le point G d'affixe *g* vérifiant : $3\,g = a + b + c$.

Les triangles ABC et DEF ont même centre de gravité si et seulement si on a : $a + b + c = d + e + f$.

On sait que les triangles BDC , CEA et AFB sont équilatéraux directs.

D'après la question précédente, on a donc les relations :

$b + j\,d + j^2c = 0$

$c + j\,e + j^2a = 0$

$a + j\,f + j^2b = 0$

Si on effectue la somme des trois lignes, on a alors :

$(a + b + c) + j\,(d + e + f\,) + j^2(a + b + c) = 0$ soit en factorisant :

$(a + b + c)\,(1 + j^2) + j\,(d + e + f\,) = 0$

Or, $1 + j + j^2 = 0$ ou encore , $1 + j^2 = -\,j$ , on peut alors écrire que :$j\,(a + b + c) + j\,(d + e + f\,) = 0$.

Comme *j* est non nul , cela conduit à : $(a + b + c) = (d + e + f\,)$. D'où la conclusion !

3. *a* : On sait que GHK est équilatéral direct si et seulement si : $\dfrac{h-k}{g-h} = j$

De plus, comme G , H et K sont les centres de gravité des triangles BDC , CEA et AFB , on a les relations :

$3\,g = b + d + a$ : $3\,h = c + e + a$ : $3\,k = a + f + b$ .

Pour simplifier, posons $u = e^{-\frac{i\pi}{3}}$ . Les triangles BDC , CEA et AFB sont équilatéraux directs, on a donc les relations :

$(c - b\,) = u\,(c - d\,)$ : $(e - a) = u\,(c - a)$ : $(a - f\,) = u\,(a - b\,)$

Or, $3\,h - 3\,k = (e - a\,) + (c - b) + (a - f\,)$

$3\,h - 3\,k = u\,[(c - a) + (c - d\,) + (a - b)]$

D'où $3\,h - 3\,k = -\,u\,[(\,b + d + a\,) - (\,c + e + a\,)]$

$3\,h - 3\,k = -\,u\,[3\,g - 3\,k\,]$

Comme $-\,u = j$ , on a bien $\dfrac{h-k}{g-h} = j$ donc GHK est bien équilatéral direct.

*b* : On sait que $(a + b + c\,) = (d + e + f\,)$ . De plus : $3\,g + 3\,h + 3\,k = 2(a + b + c\,) + (d + e + f\,)$

d'où $3\,g + 3\,h + 3\,k = 3\,(a + b + c\,)$ soit $g + h + k = (a + b + c\,)$ .

ABC et GHK ont même centre de gravité.