Pondichéry avril 2014

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)z_n$.

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)$.

2. *a*. Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel
	R réel
	P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que R > P
	n prend la valeur $n + 1$
	R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$R
	Fin tant que
Sortie	Afficher n

a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour P = 0,5 ?

b. Pour P = 0,01 on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

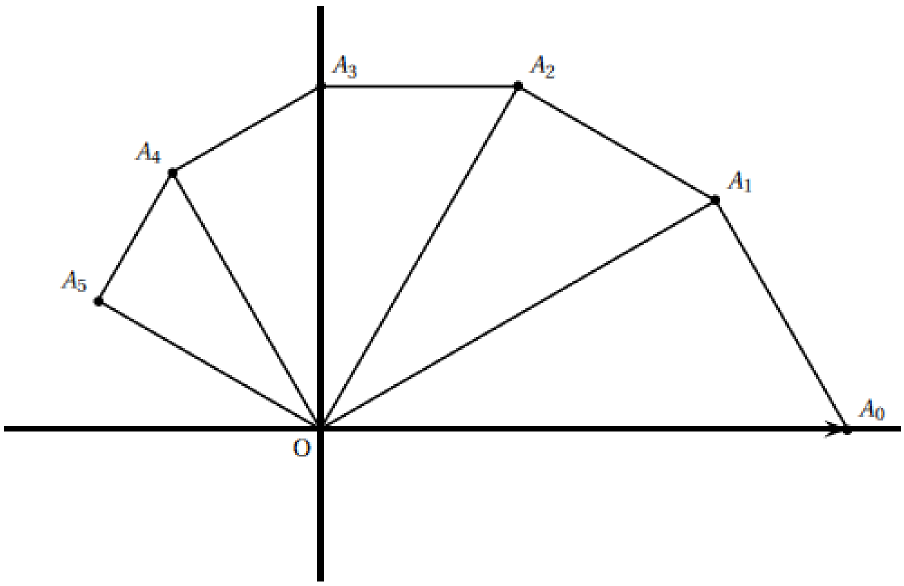
4. *a*. Démontrer que le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

b. On admet que $z_n = r_n\, e^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

c. Compléter la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie, en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.

Les traits de construction seront apparents.



CORRECTION

1. $\left|\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right|^2=\dfrac{9}{16}+\dfrac{3}{16}=\dfrac{3}{4}$ donc $\left|\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos\theta+\text{i}\sin\theta)$ donc $\cos\theta+\text{i}\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\dfrac{1}{2}$ donc $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ donc $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

2. *a.* $z_{n+1}=\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right)z_n$ donc $|z_{n+1}|=\left|\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right||z_n|$ soit $r_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r_n$ donc la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $r_n=q^n r_0$ donc $r_n=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

c. $-1<\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=0$ donc la longueur OA_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3. *a.*

n	R	Test
0	1	
1	0,8660	FAUX
2	0,75	FAUX
3	0,6495	FAUX
4	0,5625	FAUX
5	0,4871	VRAI

L'algorithme affiche 5

b. Cet algorithme s'arrête dès que R < P et affiche alors n, *c*'est-à-dire qu'il affiche la plus petite valeur de n pour laquelle R < P donc $r_n=\text{OA}_n$ est inférieur ou égal à P. On peut donc dire que $\text{OA}_{32}>0{,}01$ et que $\text{OA}_{33}\leq 0{,}01$.

4. *a.* $\text{OA}_n=r_n$, $\text{OA}_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r_n$ donc $\text{OA}_n{}^2=r_n{}^2$, $\text{OA}_{n+1}{}^2=r_{n+1}{}^2=\dfrac{3}{4}r_n{}^2$

$\text{A}_n\text{A}_{n+1}=|z_{n+1}-z_n|=\left|\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{i}-1\right||z_n|=\left|\dfrac{-1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right|r_n$

$\text{A}_n\text{A}_{n+1}{}^2=\dfrac{1}{4}r_n{}^2$

$\text{A}_n\text{A}_{n+1}{}^2+\text{OA}_{n+1}{}^2=\text{OA}_n{}^2$ donc le triangle $\text{OA}_n\text{A}_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1}.

b. A_n est un point de l'axe des ordonnées si et seulement si $\arg z_n$ est $\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$.

Il faut et il suffit donc que $n\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $n\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ donc $n=3+12k$ ou $n=-3+12k$.

c. le triangle $\text{OA}_n\text{A}_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} donc A_{n+1} appartient au cercle de diamètre $[\text{OA}_n]$.