**LIBAN juin 2016**

On considère la suite $(z_n)$ de nombres complexes définie pour tout entier naturel par : $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{i} \times z_n + 5 \end{cases}$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note le point $M_n$ d'affixe $z_n$.
On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2\,\mathrm{i}$ et $A$ le point du plan d'affixe $z_A$.

1. Soit $(u_n)$ la suite définie pour toute entier naturel par $u_n = z_n - z_A$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,u_n$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ : $u_n = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n (-4-2\,\mathrm{i})$.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, les points $A$, $M_n$ et $M_{n+4}$ sont alignés.

**CORRECTION**

1\. *a.* $u_{n+1} = z_{n+1} - z_A = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,z_n + 5 - 4 - 2\,\mathrm{i} = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,z_n + 1 - 2\,\mathrm{i} = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,z_n + \frac{2\,\mathrm{i}^2}{2} - \frac{4}{2}\,\mathrm{i} = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,(z_n - 2\,\mathrm{i} - 4) = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,u_n$

*P*our tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\,u_n$.

*b.* La suite $(u_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}\,\mathrm{i}$ de premier terme $u_0 = z_0 - z_A = -4 - 2\,\mathrm{i}$ donc pour tout entier naturel $n$ :

$u_n = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n (-4-2\,\mathrm{i})$.

2\. $u_{n+4} = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^{n+4} (-4-2\,\mathrm{i}) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^n (-4-2\,\mathrm{i})$ car $\mathrm{i}^4 = 1$ donc $u_{n+4} = \frac{1}{16}\,u_n$ donc $z_{n+4} - z_A = \frac{1}{16}\,(z_n - z_A)$.

$\overrightarrow{AM_{n+4}} = \frac{1}{16}\,\overrightarrow{AM_n}$, pour tout entier naturel $n$, les points $A$, $M_n$ et $M_{n+4}$ sont alignés.