ENONCE

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (15 - 2x)\sqrt{x} + 9x$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 18\sqrt{x} - 6x + 15$.
   a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
   b. Étudier le signe de la dérivée de g.
   c. Dresser le tableau de variation de g.
   d. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$, sans la résoudre, admet une solution unique dans $[0 ; +\infty[$.
   On notera α cette solution.
   e. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
   f. Rechercher la valeur exacte de α.
   g. En déduire le signe de g sur $[0 ; +\infty[$.
3. Démontrer que : pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$.
4. Établir le tableau de variation de f.

CORRECTION

1. $f(x) = x\left(\left(\dfrac{15}{x} - 2\right)\sqrt{x} + 9\right)$ or $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\left(\dfrac{15}{x} - 2\right)\sqrt{x} + 9\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2. *a*. $g(x) = \left(\dfrac{18}{\sqrt{x}} - 6\right)x + 15$ or $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{18}{\sqrt{x}} - 6\right) = -6$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

2. *b*. g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $g'(x) = 18 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 6 = \dfrac{9 - 6\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{x} > 0$ et $x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \dfrac{3}{2}$ et $x > 0$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{9}{4}$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{9}{4}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{4}$

2. *c*. $g\left(\dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{57}{2}$

x	0		$\dfrac{9}{4}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	15	$\nearrow$	$\dfrac{57}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

2. *d*. g est croissante sur $[0 ; 9/4]$ et $g(0) = 15$ donc pour tout x de $[0 ; 9/4]$, $g(x) \geq 15$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[0 ; 9/4]$.

f est définie dérivable, strictement décroissante sur $]9/4 ; +\infty[$, $g(]9/4 ; +\infty[) =]-\infty ; 57/2[$, donc $0 \in g(]9/4 ; +\infty[)$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]9/4 ; +\infty[$.
l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[0 ; +\infty[$.

2. *e*. $g(13{,}538) > 0$ et $g(13{,}539) < 0$ de plus l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[0 ; +\infty[$
donc $13{,}538 < \alpha < 13{,}539$

2. *f*. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 18\sqrt{x} = 6x - 15$ et $x \geq 0 \Leftrightarrow 6\sqrt{x} = 2x - 5$ et $x \geq 0$
$\Leftrightarrow 36x = (2x - 5)^2$ et $x \geq 0 \Leftrightarrow 36x = 4x^2 - 20x + 25$ et $x \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 56x + 25 = 0$ et $x \geq 0$
$\Delta = 56^2 - 4 \times 4 \times 25 = 16 \times 9 \times 19$ donc $x_1 = \dfrac{56 + 12\sqrt{19}}{8}$ et $x_2 = \dfrac{56 - 12\sqrt{19}}{8}$

$x_2 < 0$ donc ne convient pas car il est négatif donc $\alpha = x_1 = \dfrac{14 + 3\sqrt{19}}{2}$

2. *g*.

x	0		$\frac{9}{4}$		α		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0		$-$		
g	15	$\nearrow$	$\frac{57}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$g(x)$		$+$			0	$-$	

3. $f'(x) = -2\sqrt{x} + (15 - 2x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 9$

$f'(x) = \dfrac{-4x + 15 - 2x + 18\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}}$

4. Pour tout $x > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ donc

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$

$M = f(\alpha) = (15 - 2\alpha)\sqrt{\alpha} + 9\alpha$