Antilles-Guyane juin 2016

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

— à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;

— à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

— A : « l'ampoule provient de la machine A » ;

— B : « l'ampoule provient de la machine B » ;

— D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.

c. L'ampoule tirée est sans défaut.

Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a,

$P(T \leq a) = \int_0^a \lambda\ {}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}\, x$

a. Montrer que $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$.

b. Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a :

$P_{(T \geq t)}(T \geq t + a) = P(T \geq a)$.

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

a. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.

b. Calculer la probabilité $P(T > 5000)$.

c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

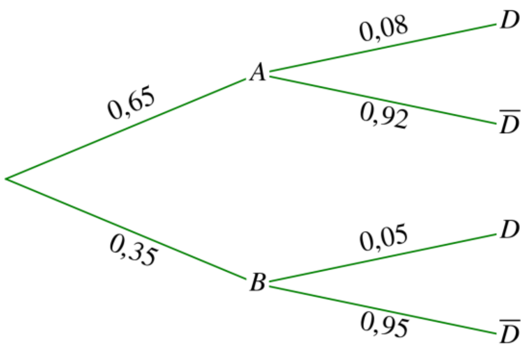
1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.

2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

CORRECTION

Partie A

1. *a.*



b. $P(\overline{D}) = P(\overline{D} \cap A) + P(\overline{D} \cap B) = 0{,}65 \times 0{,}92 + 0{,}35 \times 0{,}95 = 0{,}9305$.

c. $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P(\overline{D} \cap A)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0{,}65 \times 0{,}92}{0{,}9305}$ donc la probabilité qu'elle provienne de la machine A sachant qu'elle est sans défaut est 0,6427.

2. On a une succession de 10 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- réussite : l'ampoule est sans défaut ($p = 0{,}9305$)
- échec : l'ampoule a un défaut ($q = 1 - p = 0{,}0695$)

donc la variable aléatoire X qui compte le nombre d'ampoules ayant un défaut suit une loi binomiale de paramètres (10 ; 0 ;9305)
$P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = 0{,}8500$

Partie B

1. *a.* Une primitive de la fonction définie par $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$ est $F(x) = -e^{-\lambda x}$ donc $P(T \leq a) = F(a) - F(0) = 1 - e^{-\lambda a}$.
$P(T \geq a) = 1 - P(T \leq a)$ donc $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$.

b. $P_{(T \geq t)}(T \geq t + a) = \dfrac{P((T \geq t + a) \cap (T \geq t))}{P(T \geq t)} = \dfrac{P(T \geq t + a)}{P(T \geq t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+a) - \lambda a} = e^{-\lambda a} = P(T \geq a)$

2. *a.* $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 10\,000$ donc $\lambda = \dfrac{1}{10\,000}$ donc $\lambda = 10^{-4}$.

b. $P(T > 5000) = e^{-\lambda \times 5000} = e^{-0{,}5}$ donc $P(T > 5000) \approx 0{,}6065$

c. $P_{(T \geq 7\,000)}(T \geq 7\,000 + 5\,000) = P(T \geq 5\,000)$ donc sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures est de 0,6065

Partie C

1. $p = 0{,}06$ et $n = 1\,000$ donc $n \geq 30$, $n\,p = 60$ donc $n\,p \geq 5$, $n\,(1 - p) = 940$ donc $n\,(1 - p) \geq 5$, les conditions d'utilisation d'un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % sont réunies.

$$I = \left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\right] = \left[0{,}06 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}06 \times 0{,}94}{1000}}\ ;\ 0{,}06 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}06 \times 0{,}94}{1000}}\right]$$

$I = [0{,}0452\ ;\ 0{,}0748]$.

2. Sur l'échantillon prélevé, la fréquence d'ampoules défectueuses est $f = 0{,}071$

$f \in I$ donc au risque d'erreur de 5% on ne peut pas remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.