TRIGONOMÉTRIE DANS LE TRIANGLE RECTANGLE CORRIGÉ

Remarque: les réponses ont été arrondies au centième. Quand un résultat intermédiaire est réutilisé, on peut limiter les approximations en utilisant la mémoire de la calculatrice, mais il semble difficile de l'exiger de la part de tous les élèves. Ce corrigé a été rédigé en utilisant les résultats intermédiaires arrondis, ce qui en facilite la lecture, mais la réponse finale n'est donc pas toujours la meilleure approximation au centième du résultat exact. Pour certaines activités, les deux réponses sont présentées.

1. QUEL RAPPORT ?

Les trois rapports devraient être les mêmes dans les deux triangles, mais ils dépendent de la précision des constructions et des mesures. Les rapports seront donc approximatifs et se rapprocheront des rapports trigonométriques valables dans tous les triangles rectangles possédant un angle de 40° :

sin 40° ≅ 0,64 cos 40° ≅ 0,77 tan 40° ≅ 0,84

2. SINUS, COSINUS ET TANGENTE

	MESURES DES CÔTÉS **en cm**			RAPPORTS		
	opposé	adjacent	hypoténuse	sin α	cos α	tan α
triangle	*AB* ; *A'B'* ; *A''B''*	*OA* ; *OA'* ; *OA''*	*OB* ; *OB'* ; *OB''*	$\frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$	$\frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$	$\frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$
1	**1,4**	**4,1**	**4,3**	**~ 0,33**	**~ 0,95**	**~ 0,34**
2	**2,5**	**7,4**	**7,7**	**~ 0,32**	**~ 0,96**	**~ 0,34**
3	**3,3**	**9,6**	**10,1**	**~ 0,33**	**~ 0,95**	**~ 0,34**

Les trois rapports devraient être les mêmes dans les trois triangles, mais ils dépendent de la précision des mesures. Les rapports seront donc approximatifs et se rapprocheront des rapports trigonométriques valables dans tous les triangles rectangles possédant un angle de 19° :

sin 19° ≅ 0,33 cos 19° ≅ 0,95 tan 19° ≅ 0,34

3. AVEC LA CALCULATRICE

a)

α	sin α
75°	**~ 0,97**
~ 11,54°	0,2
impossible	2

b)

α	cos α
32°	**~ 0,85**
~ 53,13°	0,6
impossible	1,2

c)

α	tan α
57°	**~ 1,54**
~ 16,70°	0,3
~ 71,57°	3

4. À PARTIR DE CROQUIS

a) th. de Pythagore $x = \sqrt{17^2 - 15^2} = \mathbf{8}$

b) $\cos 35° = \frac{28}{x} \Rightarrow x = \frac{28}{\cos 35°} \cong \mathbf{34{,}18\ cm}$

c) $\sin \alpha = \frac{12}{24} \Rightarrow \alpha = \mathbf{30°}$

d) $\cos \alpha = \frac{45}{50} \Rightarrow \alpha \cong \mathbf{25{,}84°}$

e) $\tan 10° = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{5}{\tan 10°} \cong \mathbf{28{,}36\ cm}$

f) $\alpha = 180° - 90° - 26° = \mathbf{64°}$

g) $\sin 48° = \frac{x}{54} \Rightarrow x = 54 \cdot \sin 48° \cong \mathbf{40{,}13\ cm}$

h) $\tan 18° = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 10 \cdot \tan 18° \cong \mathbf{3{,}25\ cm}$

i) $\cos 80° = \frac{x}{24} \Rightarrow x = 24 \cdot \cos 80° \cong \mathbf{4{,}17\ cm}$

j) $\sin 75° = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{10}{\sin 75°} \cong \mathbf{10{,}35\ cm}$

k) $\tan \alpha = \frac{45}{35} \Rightarrow \alpha \cong \mathbf{52{,}13°}$

5. CÔTÉS ET ANGLES

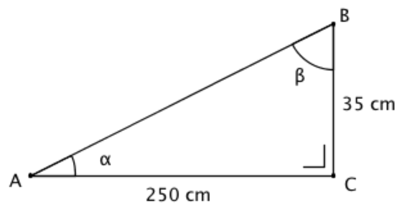
	AB	*BC*	*AC*	β	γ			
a)	3,2	5,6	**~ 4,60**	**~ 55,15°**	**~ 34,85°**	$AC = \sqrt{5{,}6^2 - 3{,}2^2}$	$\cos\beta = \dfrac{3{,}2}{5{,}6}$	$\sin\gamma = \dfrac{3{,}2}{5{,}6}$
b)	**3**	5	4	**~ 53,13°**	**~ 36,87°**	$AB = \sqrt{5^2 - 4^2}$	$\sin\beta = \dfrac{4}{5}$	$\cos\gamma = \dfrac{4}{5}$
c)	2,5	**~ 5,41**	4,8	**~ 62,49°**	**~ 27,51°**	$BC = \sqrt{2{,}5^2 + 4{,}8^2}$	$\tan\beta = \dfrac{4{,}8}{2{,}5}$	$\tan\gamma = \dfrac{2{,}5}{4{,}8}$
d)	4	**~ 6,22**	**~ 4,77**	**50°**	40°	$\sin 40° = \dfrac{4}{BC}$	$\tan 40° = \dfrac{4}{AC}$	$\beta = 90° - 40°$
e)	**~ 10,97**	**~ 12,06**	5	**24,5°**	65,5°	$\tan 65{,}5° = \dfrac{AB}{5}$	$\cos 65{,}5° = \dfrac{5}{BC}$	$\gamma = 90° - 65{,}5°$
f)	**~ 12,40**	45	**~ 43,26**	74°	**16°**	$\cos 74° = \dfrac{AB}{45}$	$\sin 74° = \dfrac{AC}{45}$	$\gamma = 90° - 74°$

6. ET LES ANGLES ?

2,5 m = 250 cm $\qquad \tan\alpha = \dfrac{35}{250} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 7{,}97°$

$\tan\beta = \dfrac{250}{35} \quad \Rightarrow \quad \beta \cong 82{,}03°$

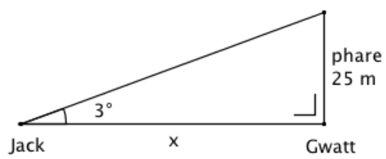
On a $\widehat{ACB}$ = **90°** $\qquad \widehat{BAC} \cong$ **7,97°** et $\qquad \widehat{ABC} \cong$ **82,03°**.



7. À LA RAME

$\tan 3° = \dfrac{25}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{25}{\tan 3°} \cong 477{,}03$ m

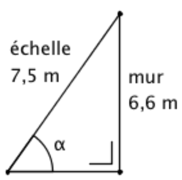
Jack doit encore parcourir **environ 480 m.**



8. L'ÉCHELLE

$\sin\alpha = \dfrac{6{,}6}{7{,}5} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 61{,}64°$

L'échelle fait un angle **d'environ 62°** avec le sol.



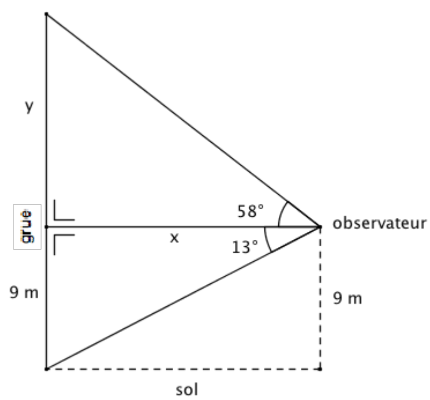
9. LA GRUE

$\tan 13° = \dfrac{9}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{9}{\tan 13°} \cong 38{,}98$ m

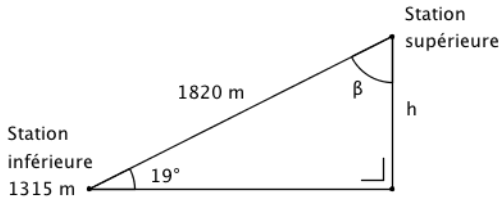
$\tan 58° \cong \dfrac{y}{38{,}98} \quad \Rightarrow \quad y \cong 38{,}98 \cdot \tan 58° \cong 62{,}38$ m

Hauteur de la grue : $y + 9 \cong 62{,}38 + 9 \cong 71{,}38$ m

La grue mesure **environ 71 m** de haut.



10. LE TÉLÉPHÉRIQUE



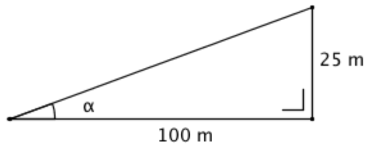
4 min 20 sec = 260 secondes
Distance parcourue le long du câble : 260 · 7 = 1820 m

$\sin 19° = \dfrac{h}{1820} \quad \Rightarrow \quad h = 1820 \cdot \sin 19° \cong 592{,}53$ m

Altitude de la station supérieure : 1315 + 592,53 = 1907,53 m

La station supérieure est à une altitude **d'environ 1908 m**.

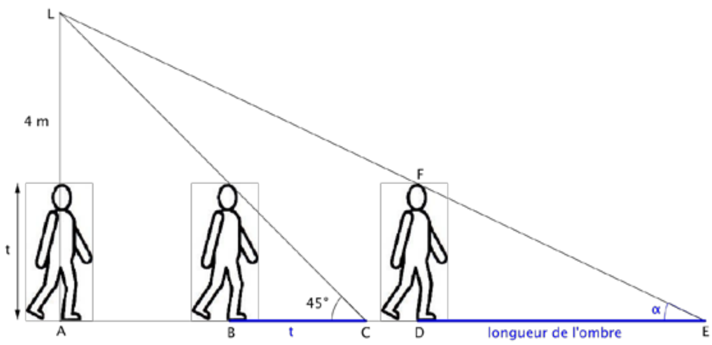
11. TRÈS RAIDE !



$\tan \alpha = \dfrac{25}{100} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 14{,}04°$

Une pente de 25% représente une angle **d'environ 14°.**

12. MARCHE À L'OMBRE



Les réponses vont dépendre de la taille **t** de l'élève.

a) La longueur de l'ombre est égale à la taille quand l'angle formé par le rayon lumineux passant par le sommet de la tête et le sol mesure 45°.

Le triangle LAC est isocèle et rectangle en A, ainsi *AC* = 4 m et ***AB* = 4 – t**.

b) les triangles *AEL* et *DEF* sont semblables : $\dfrac{AD+15}{15} = \dfrac{4}{t} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{AD = }\dfrac{60}{t} - 15$

c) $\tan 18° = \dfrac{t}{DE} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{DE = }\dfrac{t}{\tan 18°}$

Si la taille de l'élève est 1,60 m, on obtient les réponses suivantes : a) 2,40 m b) 22,5 m c) ~ 4,92 m

FAIRE LE POINT

1) Hauteur de l'arbre = 15 · tan 32° ≅ 9,37 m ≅ **9 m**

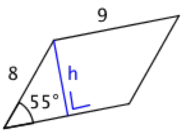
2) a) Hauteur du mât = 12 · sin 70° ≅ **11,28 m**

   b) Longueur du bateau ≅ $12 \cdot \cos 70° + \dfrac{11{,}28}{\tan 65°} \cong 4{,}10 + 5{,}26 \cong$ **9,36 m**

   c) Longueur totale des cordes ≅ $12 + \dfrac{11{,}28}{\sin 65°} \cong 12 + 12{,}45 \cong$ **24,45 m**

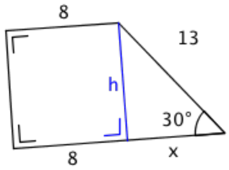
3) 3 m = 300 cm et $\sin \alpha = \dfrac{300}{325}$, donc $\alpha \cong 67{,}38° \cong 67°$. L'échelle n'est **pas stable**.

13. AUSSI DES QUADRILATÈRES



$\sin 55° = \dfrac{h}{8} \quad \Rightarrow \quad h = 8 \cdot \sin 55° \cong 6{,}55$ cm

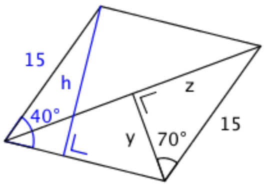
Aire $\cong 9 \cdot 6{,}55 \cong$ **58,95 cm²** ou Aire $= 9 \cdot h \cong$ **58,98 cm²**



$\sin 30° = \dfrac{h}{13} \quad \Rightarrow \quad h = 13 \cdot \sin 30° = 6{,}5$ cm

$\cos 30° = \dfrac{x}{13} \quad \Rightarrow \quad x = 13 \cdot \cos 30° \cong 11{,}26$ cm

Aire $\cong (8 + 19{,}26) : 2 \cdot 6{,}5 \cong$ **88,60 cm²** ou Aire $= (8 + 8 + x) : 2 \cdot 6{,}5 \cong$ **88,59 cm²**



$\cos 70° = \dfrac{y}{15} \quad \Rightarrow \quad y = 15 \cdot \cos 70° \cong 5{,}13 \quad \Rightarrow \quad 2y \cong 10{,}26$ cm

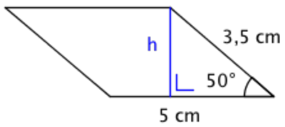
$\sin 70° = \dfrac{z}{15} \quad \Rightarrow \quad z = 15 \cdot \sin 70° \cong 14{,}10 \quad \Rightarrow \quad 2z \cong 28{,}20$ cm

Aire $\cong (10{,}26 \cdot 28{,}20) : 2 \cong$ **144,67 cm²** ou Aire $= (2y \cdot 2z) : 2 \cong$ **144,63 cm²**

Ou : $\sin 40° = \dfrac{h}{15} \quad \Rightarrow \quad h = 15 \cdot \sin 40° \cong 9{,}64$ cm

Aire $\cong 15 \cdot 9{,}64 \cong$ **144,60 cm²** ou Aire $= 15 \cdot h \cong$ **144,63 cm²**

14. LA BASE D'UN PRISME



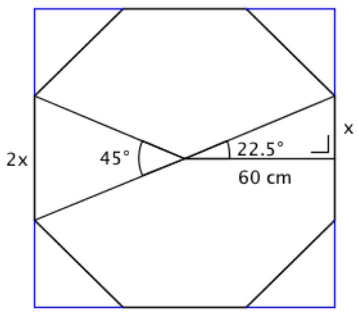
$\sin 50° = \dfrac{h}{3{,}5} \quad \Rightarrow \quad h = 3{,}5 \cdot \sin 50° \cong 2{,}68$ cm

Aire totale $\cong 2 \cdot (5 \cdot 2{,}68 + 5 \cdot 6 + 3{,}5 \cdot 6) \cong 2 \cdot (13{,}4 + 30 + 21) \cong 128{,}80$ cm²

Volume $\cong 5 \cdot 2{,}68 \cdot 6 \cong 80{,}4$ cm³

Le prisme a une aire totale d'**environ 128,8 cm²** et un volume d'**environ 80,4 cm³**.

15. UNE NAPPE OCTOGONALE

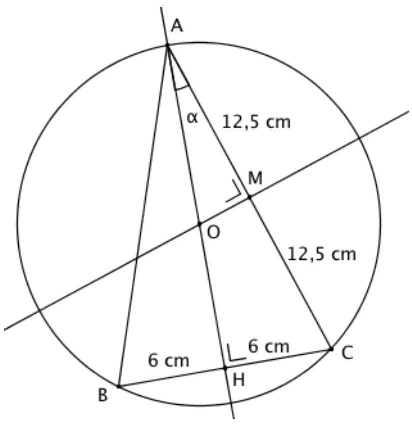


$\tan 22{,}5° = \dfrac{x}{60} \quad \Rightarrow \quad x = 60 \cdot \tan 22{,}5° \cong 24{,}85$ cm

$2x \cong 2 \cdot 24{,}85 \cong 49{,}70$ cm

Le plus grand côté possible de la nappe est d'**environ 49,7 cm**.

16. ENCORE UN TRIANGLE ISOCÈLE



ABC est un triangle isocèle de sommet *A*.
AH est une hauteur et une médiatrice. *M* est le milieu de *AC*.

Dans le triangle *ACH* $\quad \sin \alpha = \dfrac{6}{25} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 13{,}89°$

Dans le triangle *AMO* $\quad \cos 13{,}89° \cong \dfrac{12{,}5}{OA} \quad \Rightarrow$

$OA \cong \dfrac{12{,}5}{\cos 13{,}89°} \cong 12{,}88$ cm

Le cercle circonscrit du triangle *ABC* a un rayon **d'environ 12,88 cm**

17. AVEC DES HAUTEURS

	α	β	*BC*	*AB=AC*	*AP*	*BQ=RC*
a)	**~66,00°**	**~57,00°**	9,3	**~8,54**	**~7,16**	7,8
b)	65°	**57,5°**	**~37,61**	35	**~29,52**	**~31,72**
c)	**~49,48°**	**~65,26°**	47	**~56,15**	51	**~42,68**
d)	**122°**	29°	**~30,61**	17,5	**~8,48**	**~14,84**

ABC est un triangle isocèle en *A*, donc *AP* est une hauteur, une bissectrice et une médiane. *P* est donc le milieu de *BC*.

a) Triangle *BCR* : $\sin\beta = \dfrac{7{,}8}{9{,}3} \Rightarrow \beta \cong 57{,}00°$

$\Rightarrow \alpha \cong 66{,}00°$

Triangle *ARC* : $\sin 66° \cong \dfrac{7{,}8}{AC} \Rightarrow AC \cong 8{,}54$

Triangle *APC*, théorème de Pythagore :

$AP \cong \sqrt{8{,}54^2 - 4{,}65^2} \cong 7{,}16$

b) Dans le triangle *ABQ* : $\sin 65° = \dfrac{BQ}{35} \Rightarrow BQ \cong 31{,}72$

Dans le triangle *ABP* : $\sin 32{,}5° = \dfrac{BP}{35} \Rightarrow BC = 2 \cdot 35 \cdot \sin 32{,}5° \cong 37{,}61$ puis $\cos 32{,}5° = \dfrac{AP}{35} \Rightarrow AP \cong 29{,}52$

c) Dans le triangle *APB*, théorème de Pythagore : $AB = \sqrt{51^2 + 23{,}5^2} \cong 56{,}15$, puis $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{23{,}5}{51} \Rightarrow \alpha \cong 49{,}48°$

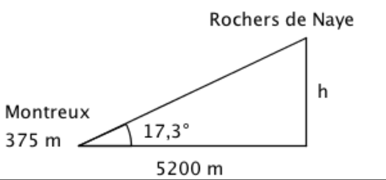
Dans le triangle *AQB* : $\sin 49{,}48° \cong \dfrac{BQ}{56{,}15} \Rightarrow BQ \cong 42{,}68$

d) Le triangle *ABC* possède un angle obtus, les hauteurs se coupent à l'extérieur du triangle.

Dans le triangle *ABP* : $\cos 29° = \dfrac{BP}{17{,}5} \Rightarrow BC = 2 \cdot 17{,}5 \cdot \cos 29° \cong 30{,}61$, puis $\sin 29° = \dfrac{AP}{17{,}5} \Rightarrow AP \cong 8{,}48$

Dans le triangle *ABQ* : $\sin(180° - 122°) = \dfrac{BQ}{17{,}5} \Rightarrow BQ \cong 14{,}84$

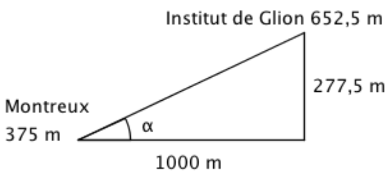
18. BONJOUR LES TOURISTES !



5,2 cm sur une carte au 1 : 100 000 représentent 5200 m dans la réalité.

$\tan 17{,}3° = \dfrac{h}{5200} \Rightarrow h = 5200 \cdot \tan 17{,}3° \cong 1619{,}62$

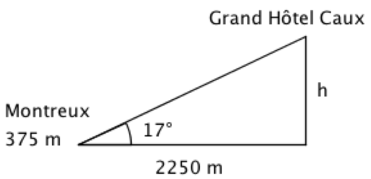
Altitude des Rochers de Naye : 375 + 1619,62 = 1994,62 ≅ **1995 m**



1 cm sur une carte au 1 : 100 000 représentent 1000 m dans la réalité.
Différence d'altitude entre Glion et Montreux : 652,5 – 375 = 277,5 m

$\tan\alpha = \dfrac{277{,}5}{1000} \Rightarrow \alpha \cong 15{,}51°$

Le touriste doit donc **baisser** les yeux.

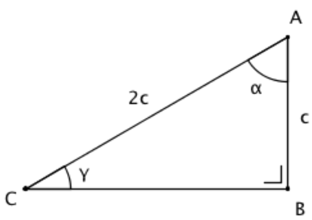


2,25 cm sur une carte au 1 : 100 000 représentent 2250 m dans la réalité.

$\tan 17° = \dfrac{h}{2250} \Rightarrow h = 2250 \cdot \tan 17° \cong 687{,}89$

Altitude du Grand Hôtel de Caux ≅ 375 + 687,89 ≅ 1062,89 m
Différence d'altitude avec Glion : 1062,89 – 652,5 = 410,39 ≅ **410 m**

19. LE DOUBLE



$\cos\alpha = \dfrac{c}{2c} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$ ou $\sin\gamma = \dfrac{c}{2c} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 30°$

Le triangle *ABC* **est bien la moitié d'un triangle équilatéral**.

20. TROIS CARRÉS IDENTIQUES

AB = c Triangle *ABG* : $\tan\alpha = \frac{c}{c} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$ Triangle *ACF* : $\tan\beta = \frac{c}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta \cong 26{,}57°$

Triangle *ADE* : $\tan\gamma = \frac{c}{3c} = \frac{1}{3} \Rightarrow \gamma \cong 18{,}43°$ $\alpha + \beta + \gamma \cong 45° + 26{,}57° + 18{,}43° \cong$ **90,00°**

21. LE PARTAGE DU POTAGER

E et *F* sont des milieux de côtés donc les triangles *BCE* et *CDF* sont des quarts du carré.

Part de chacun : Lucette : $\frac{1}{4}$ André : $\frac{1}{4}$ Aloys : $\frac{1}{2}$

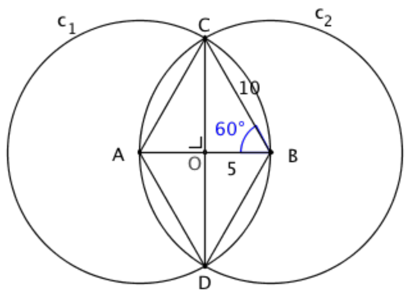
$\tan\widehat{BCE} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \widehat{BCE} \cong 26{,}57°$ $\Rightarrow \alpha \cong 90° - 2 \cdot \widehat{BCE} \cong$ **36,86°**

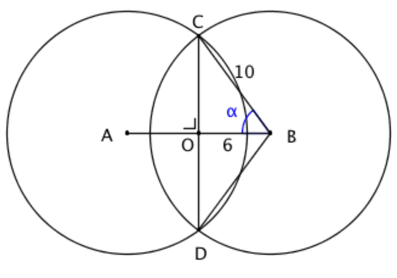
22. QUELQUES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES

	mesure de l'angle α				
	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n'existe pas

$\sin\beta = \cos\alpha$ $\cos\beta = \sin\alpha$ $\tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}$

23. INTERSECTION DE DEUX DISQUES





a) Si *C* et *D* sont les intersections des cercles c_1 et c_2 , les triangles *ABC* et *ABD* sont équilatéraux. Un quart de l'intersection des deux disques peut être considéré comme un secteur circulaire *BCA* (angle au centre 60°) auquel on aurait enlevé le triangle *BOC*, rectangle en *O*.

Périmètre de l'intersection : $4 \cdot 2\pi \cdot 10 \cdot \frac{60°}{360°} \cong$ **41,89 cm**

Th. de Pythagore dans le triangle *BOC* : $OC = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} \cong 8{,}66$

Aire de l'intersection : $4 \cdot (\pi \cdot 10^2 \cdot \frac{60°}{360°} - \frac{5 \cdot 8{,}66}{2}) \cong$ **122,84 cm²**

b) Même raisonnement que a) sauf qu'il faut calculer l'angle au centre.

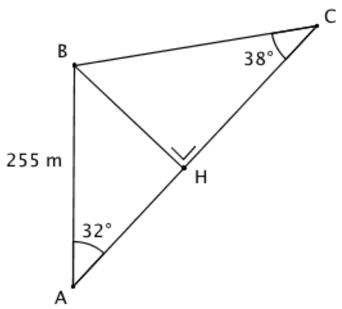
Th. de Pythagore dans le triangle *BOC* : $OC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

$\cos\alpha = \frac{6}{10}$ $\Rightarrow \alpha \cong 53{,}13°$

Périmètre de l'intersection : $4 \cdot 2\pi \cdot 10 \cdot \frac{53{,}13°}{360°} \cong$ **37,09 cm**

Aire de l'intersection : $4 \cdot (\pi \cdot 10^2 \cdot \frac{53{,}13°}{360°} - \frac{6 \cdot 8}{2}) \cong$ **89,46 cm²**

24. OBSTACLE



On partage le triangle quelconque *ABC* en deux triangles rectangles en traçant la hauteur *BH*.

Dans le triangle *ABH* : $\cos 32° = \frac{AH}{255}$ $\Rightarrow$ *AH* $\cong$ 216,25 m

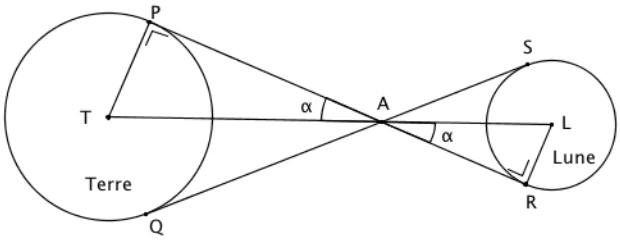
$\sin 32° = \frac{BH}{255}$ $\Rightarrow$ *BH* $\cong$ 135,13 m

Dans le triangle *BCH* : $\tan 38° \cong \frac{135,13}{CH}$ $\Rightarrow$ *CH* $\cong$ 172,96 m

AC $\cong$ 216,25 + 172,96 $\cong$ 389,21 m

La distance entre les points A et C est d'**environ 390 m**.

25. TERRE – LUNE

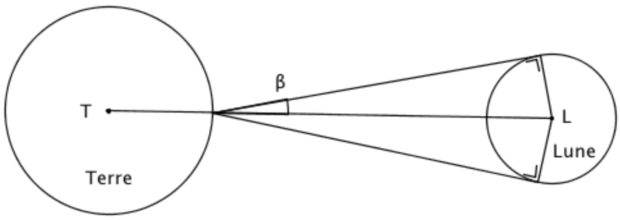


TL $\cong$ 384'000 km *TP* $\cong$ 6400 km *LR* $\cong$ 1700 km

a) $\frac{6400}{AT} = \frac{1700}{384000 - AT}$ $\Rightarrow$ *AT* $\cong$ **303'407 km**

b) $\sin\alpha = \frac{6400}{303407}$ $\Rightarrow \alpha \cong 1,21°$ Angle de vue $\cong$ **2,42°**

La Terre et la Lune se voient sous un même angle d'**environ 2,4°** pour un astronaute placé entre la Terre et la Lune à une distance d'**environ 303'000 km** du centre de la Terre et **81'000 km** du centre de la Lune.



c) Depuis la surface de la Terre : $\sin \beta \cong \frac{1700}{377600}$

$\beta \cong 0,26°$

Angle de vue = $2\beta \cong$ **0,52°**

La Lune se voit depuis la surface de la Terre sous un angle d'**environ 0,5°**.