**Partie A**

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature $n$ : $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

**1.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n > 1$.

**2.** *a*. Établir que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$

***b.*** Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$.
En déduire que la suite $(u_n)$ converge.

**Partie B**

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature $n$ : $u_{n+1} = \dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

**1.** On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Entrée | Soit un entier naturel non nul $n$ |
| Initialisation | Affecter à $u$ la valeur 2 |
| Traitement et sortie | POUR $i$ allant de 1 à $n$<br>Affecter à $u$ la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$<br>Afficher $u$ |
| | FIN POUR |

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de $u$ seront arrondies au millième.

| $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $u$ | | | |

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

| $i$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 1,0083 | 0,9973 | 1,0009 | 0,9997 | 1,0001 | 0,99997 | 1,00001 | 0,999996 | 1,000001 |

Conjecturer le comportement de la suite $(u_n)$ à l'infini.

**3.** On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

***a.*** Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

***b.*** Calculer $v_0$ puis écrire $v_n$ en fonction de $n$.

**4. *a.*** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $v_n \neq 1$.

***b.*** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

***c.*** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**CORRECTION**

**Partie A**

**1.** Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n > 1$.
Initialisation : $u_0 = 2$ donc $u_0 > 1$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$
Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel $n$, si $u_n > 1$ alors $u_{n+1} > 1$.

$u_{n+1} - 1 = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - 1 = \dfrac{2u_n - 2}{3+u_n} = 2\dfrac{u_n - 1}{3+u_n}$ or $u_n > 1$ donc $u_{n+1} - 1 > 0$ soit $u_{n+1} > 1$.

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel $n$, $u_n > 1$.

**2. *a.*** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \dfrac{1-u_n^2}{3+u_n} = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$. Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$

***b.*** Pour tout entier naturel $n$, $u_n > 1$ donc $1 - u_n < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.
La suite $(u_n)$ est décroissante minorée par 1 donc converge.

**Partie B**

**1.**

| $i$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $u$ | 0,8 | 1,077 | 0,976 |

**2.** Apparemment $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

**3.** On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

***a.*** $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1}$ or $u_{n+1} - 1 = 0{,}5\,\dfrac{1 - u_n}{0{,}5 + u_n}$ et $u_{n+1} + 1 = 1{,}5\,\dfrac{1 + u_n}{0{,}5 + u_n}$ donc $v_{n+1} = \dfrac{0{,}5}{1{,}5} \times \dfrac{\dfrac{1 - u_n}{0{,}5 + u_n}}{\dfrac{1 + u_n}{0{,}5 + u_n}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1 - u_n}{1 + u_n}$

$v_{n+1} = -\dfrac{1}{3}\,v_n$ donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

***b.*** $v_0 = \dfrac{1}{3}$ donc $v_n = \dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$.

**4. *a.*** Pour tout entier naturel $n$, on a : $v_n = -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ donc $v_n \neq 1$.

***b.*** $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ donc $v_n\,(u_n + 1) = (u_n - 1) \Leftrightarrow u_n v_n - u_n = -1 - v_n \Leftrightarrow u_n - u_n v_n = 1 + v_n \Leftrightarrow u_n\,(1 - v_n) = 1 + v_n$

Pour tout entier naturel $n$, $v_n \neq 1$ donc pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

***c.*** $-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ soit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.