Polynésie juin 2006

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$; unité graphique 2 cm.

On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$.

On considère l'application f qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M′ d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z-1}{z+1}.$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que M = f (M).

2. ***a.*** Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de − 1, $(z' - 1)(z + 1) = -2$.

b. En déduire une relation entre $|z' - 1|$ et $|z + 1|$, puis entre $\arg(z' - 1)$ et $\arg(z + 1)$, pour tout nombre complexe z différent de − 1.

Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.

3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M′ appartient au cercle (C′) de centre A et de rayon 1.

4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.

a. Déterminer la forme exponentielle de $(p + 1)$.

b. Montrer que le point P appartient au cercle (C).

c. Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p.

Montrer que les points A, P′ et Q sont alignés.

d. En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P′ du point P par l'application f.

CORRECTION

1. Si $z \neq -1$, $z = \dfrac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z^2 + z = z - 1 \Leftrightarrow z^2 = -1$

$\Leftrightarrow z = i$ ou $z = -i$. Les points invariants par f sont les deux points d'affixes i et − i

2. *a.* $z \neq -1$, $(z' - 1)(z + 1) = \left(\dfrac{z-1}{z+1} - 1\right)(z + 1)$

$z \neq -1$, $(z' - 1)(z + 1) = z - 1 - (z + 1) = -2$

b. L'égalité de ces deux complexes entraîne l'égalité de leurs modules

$|(z' - 1)(z + 1)| = |-2| \Leftrightarrow |z' - 1| \times |z + 1| = 2$

De même pour les arguments :

$\arg[(z' - 1)(z + 1)] = \arg(-2) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$\arg(z' - 1) + \arg(z + 1) = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$|z' - 1| \times |z + 1| = 2 \Leftrightarrow AM' \times BM = 2$

$\arg(z' - 1) + \arg(z + 1) = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$\Leftrightarrow \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{BM}\right) = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

3. M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2 si et seulement si BM = 2

or pour tout point M du plan différent de B, AM′ ×BM = 2

donc en remplaçant : 2 A*M′* = 2 ⇔ A*M′* = 1

donc *M′* appartient au cercle (C′) de centre A et de rayon 1.

4. *a.* $p + 1 = -2 + 1 + i\sqrt{3}$.

D'où $|p + 1|^2 = 1 + 3 = 4 \Leftrightarrow |p + 1| = 2$.

Donc

$p + 1 = 2(\cos\theta + i\sin\theta) = -1 + i\sqrt{3}$.

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ donc } p + 1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

b. $|p + 1| = 2 \Leftrightarrow BP = 2 \Leftrightarrow$ P appartient au cercle (C).

c. Pour tout complexe $z \neq -1$: $|z' - 1| \times |z + 1| = 2$

et $\arg(z' - 1) + \arg(z + 1) = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

donc pour $z = p$ on obtient :

$|p' - 1| \times |p + 1| = 2$ et $\arg(p' - 1) + \arg(p + 1) = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

donc $|p' - 1| = 1$ et $\arg(p' - 1) + \pi - \dfrac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

soit $|p' - 1| = 1$ et $\arg(p' - 1) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc $p' - 1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$p + 1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ donc $\overline{p} + 1 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

soit $1 - q = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ donc $q - 1 = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

soit $\overrightarrow{AQ} = 2\,\overrightarrow{AP'}$ donc les points A, P′ et Q sont alignés et P est le milieu de [AQ].

d. On en déduit une construction simple de P′ :

– Construire Q symétrique de P autour de l'axe des ordonnées ;

– P′ est le milieu de [AQ].