Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n + 2)$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (on rappelle que $\ln 2 \approx 0,7$).

En déduire le sens de variation de (u_n).

2. Montrer par récurrence que (u_n) est majorée par 2.
3. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n)

CORRECTION

1. Initialisation : $u_1 = \ln(u_0 + 2) = \ln 2$ donc $u_1 > 0$ soit $u_1 > u_0$. La propriété est initialisée.

Hérédité : montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $u_{n+1} > u_n \geq 0$ alors $u_{n+2} > u_{n+1} \geq 0$.

$u_{n+1} > u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} + 2 > u_n + 2 \geq 2 > 0$ donc $\ln(u_{n+1} + 2) > \ln(u_n + 2) \geq \ln 2 > 0$ soit $u_{n+2} > u_{n+1} > 0$
La propriété est héréditaire
Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de n, $u_{n+1} > u_n \geq 0$
La suite (u_n) est croissante.

2. Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leq 2$

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $u_0 \leq 2$. La propriété est initialisée.

Hérédité : montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $u_n \leq 2$ alors $u_{n+1} \leq 2$.

$0 < u_n \leq 2$ donc $2 < u_n + 2 \leq 4$ donc $\ln(u_n + 2) \leq \ln(4)$ or $\ln 4 = 2 \ln 2$ donc $\ln 4 \approx 1,4$ donc $\ln(u_n + 2) \leq \ln 4 \leq 2$
La propriété est héréditaire
Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de n, $u_n \leq 2$
La suite (u_n) est majorée par 2.

3. La suite (u_n) est croissante majorée par 2 donc converge vers une limite comprise entre 0 et 2.