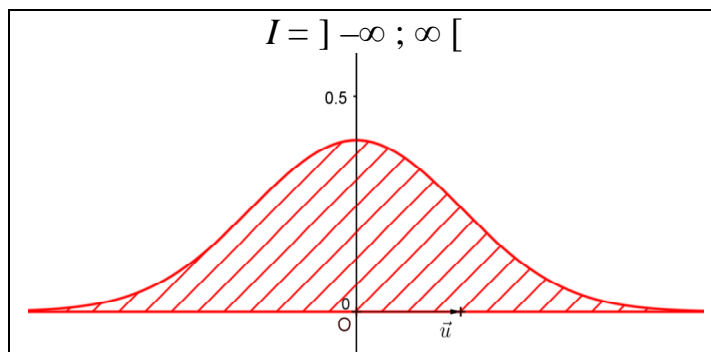
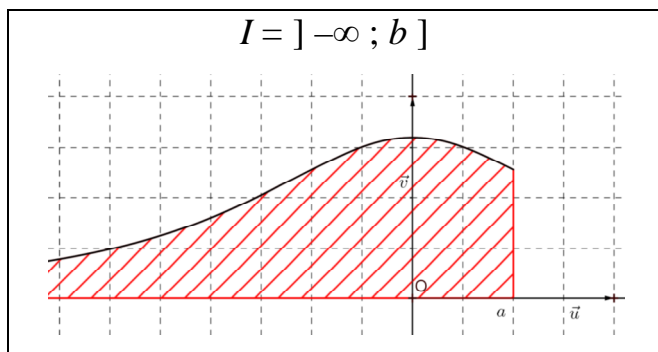
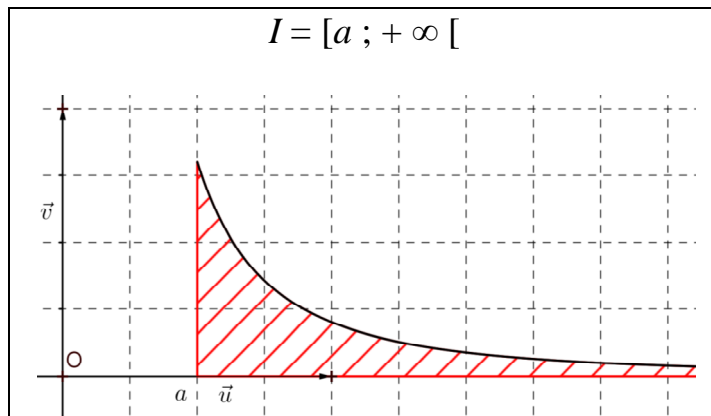
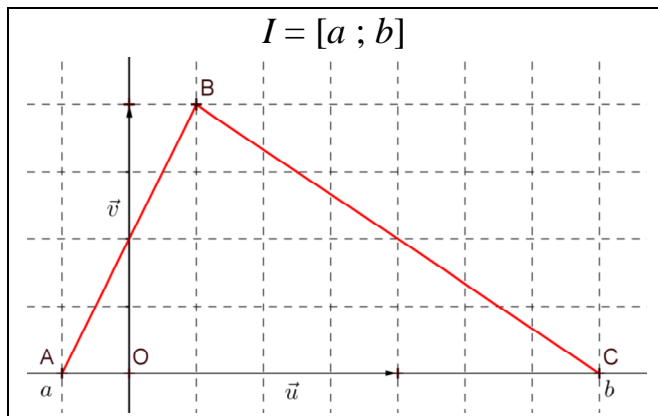


1. Lois de probabilité à densité

Définition : Une fonction f , définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , est une densité de probabilité sur I lorsque :

- f est continue sur I ;
- f est à valeurs positives sur I ;
- l'aire sous la courbe de f est égale à 1 u.a.



On considère une expérience aléatoire et un univers associé Ω , muni d'une loi de probabilité P . Soit X une variable aléatoire, fonction de Ω dans \mathbb{R} , qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de \mathbb{R}

Soit f une fonction, définie sur I , qui est une densité de probabilité sur I .

Définition : La variable aléatoire X suit la loi de densité f sur l'intervalle I (ou est « à densité f sur I ») lorsque, pour tout événement J inclus dans I , la probabilité de l'événement $(X \in J)$ est la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine :

$$\{M(x; y); x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Remarque : On retrouve que : $P(X \in I) = 1$.

En général, les probabilités seront calculées par des intégrales.

On admet que l'on peut prolonger la loi de probabilité à toutes unions finies d'intervalles de telle sorte que l'on ait la propriété :

Propriété : Si J et J' sont deux unions finies d'intervalles inclus dans I , on a :

$$P(X \in J \cup J') = P(X \in J) + P(X \in J')$$

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de densité f sur l'intervalle I , on a les propriétés suivantes.

a. Pour tout intervalle $J = [c ; d]$ de I , on a : $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t) dt$

b. Pour tout réel α de I , on a : $P(\alpha) = 0$

c. Pour tous réels c et d de I ,

$$P(c \leq X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X \leq d) = P(c < X < d) =$$

d. Soit J un intervalle, on a : $P(X \in \overline{J}) = P(X \in J)$.

Définition Soit I' un intervalle de I tel que $P(X \in I') \neq 0$ et soit J un autre intervalle de I . On définit la probabilité conditionnelle

$$P_{X \in I'}(X \in J) \text{ par l'égalité : } P_{X \in I'}(X \in J) = \frac{P(X \in I' \cap J)}{P(X \in I')}.$$

L'espérance $E(X)$ d'une variable aléatoire à densité f sur $[a ; b]$; est définie par :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx.$$

2. Lois uniformes

Définition : On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 1]$; si sa densité est la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = 1$

Propriété : Pour tout intervalle $[c ; d]$ inclus dans $[0 ; 1]$; , on a : $P(c \leq X \leq d) = d - c$

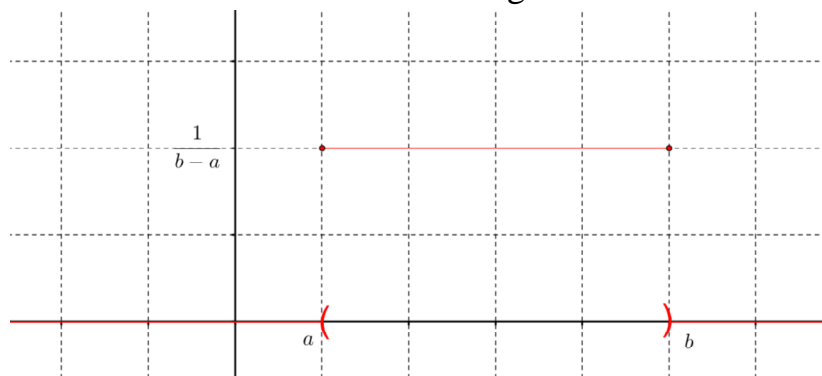
Définition : Soit a et b deux nombres réels distincts tels que $a < b$.

Une variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur l'intervalle $I = [a ; b]$ si et seulement si sa densité est définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On note: X suit la loi **U** ($[a ; b]$).

Pour tout intervalle J contenu dans I , $P(X \in J) = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}$.



Propriété : Soit a et b deux nombres réels distincts tels que $a < b$.

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a ; b]$ est

donnée par : $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

3. Lois exponentielles

Définition : Soit λ un réel strictement positif.

La variable aléatoire continue X suit une loi exponentielle de paramètre λ si et seulement si sa densité f est définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Propriétés : Quels que soient les nombres réels positifs a , c et d , on a :

$$P(X \in [c ; d]) = P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

$$P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$P(X \geq a) = e^{-\lambda a}$$

Définition : On définit l'espérance $E(X)$ d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de

paramètre λ en posant : $E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t) dt$.

Propriété : L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre

$\lambda > 0$ est donnée par : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Propriété : Durée de vie sans vieillissement

Soit λ un réel strictement positif.

Si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors cette variable aléatoire vérifie la propriété dite de durée de vie sans vieillissement :

$$P_{X \geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h) \text{ pour tous réels } t \text{ et } h \text{ positifs.}$$