Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2\,\mathrm{i},\ b = -\sqrt{3} + \mathrm{i},\ c = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\ d = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \text{ et } e = -1 + (2 + \sqrt{3})\,\mathrm{i}.$$

1. **Affirmation 1 :** les points A, B et C sont alignés.

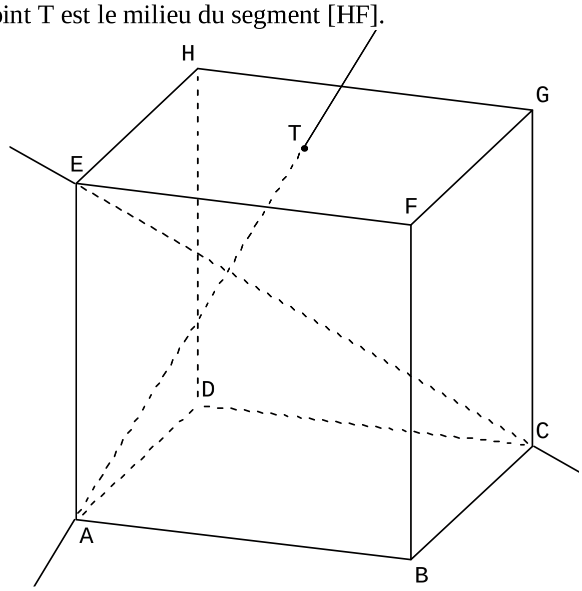
2. **Affirmation 2 :** les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

3. Dans cette question, l'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).

Affirmation 3 : la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$, coupe le plan (IJK) au point E $\left(-\frac{1}{2} ; 1 ; \frac{1}{2}\right)$.

4. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



Affirmation 4 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.

CORRECTION

1. Affirmation 1 : VRAIE

Pour montrer que les points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$ donc en égalant les affixes, un réel k tel que : $b - a = k\,(c - a)$

$b - a = -2 - \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $c - a = -1 + \mathrm{i}\,(\sqrt{3} - 2) = -1 - \mathrm{i}\,(2 - \sqrt{3})$

$c - a$ a pour partie réelle -1 et $b - a$ a pour partie réelle $-2 - \sqrt{3}$, or $k\,(c - a)$ a pour réelle $-k$ donc si k existe $k = 2 + \sqrt{3}$

$(2 + \sqrt{3})\,(c - a) = -(2 + \sqrt{3}) + \mathrm{i}\,(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$ or $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^{\,2} = 1$

$(2 + \sqrt{3})\,(c - a) = -2 - \sqrt{3} - \mathrm{i}$ donc $(2 + \sqrt{3})\,(c - a) = (b - a)$ donc $\overrightarrow{AB} = (2 + \sqrt{3})\,\overrightarrow{AC}$, les points A, B et C sont alignés.

On pouvait aussi calculer $\dfrac{b - a}{c - a}$ et montrer que le résultat était un réel k, on arrivait alors à $b - a = k\,(c - a)$ d'où le résultat.

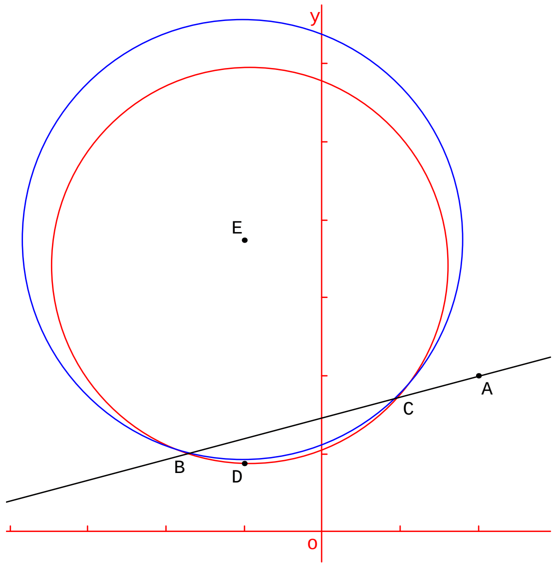
2. Affirmation 2 : FAUSSE

$\mathrm{EB} = |-\sqrt{3} + \mathrm{i} + 1 - (2 + \sqrt{3})\,\mathrm{i}| = |-1 - \sqrt{3} - \mathrm{i}\,(1 + \sqrt{3})|$

$\mathrm{EB} = \sqrt{(-1 + \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 3 + 2\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$

$\mathrm{EC} = |1 + \mathrm{i}\sqrt{3} + 1 - (2 + \sqrt{3})\,\mathrm{i}| = |2 - 2\,\mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$d - e = -\dfrac{\sqrt{3} + 2}{2}\,\mathrm{i}$ donc $\mathrm{ED} = \dfrac{\sqrt{3} + 2}{2}$, $\mathrm{ED} \neq \mathrm{EB}$



3. Affirmation 3 : VRAIE

Le plan (IJK) a pour équation $x + y + z = 1$ donc a pour vecteur normal $\vec{n}\,(1\,;1\,;1)$

Soit $\mathrm{E}\left(-\dfrac{1}{2}\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$, $x_{\mathrm{E}} + y_{\mathrm{E}} + z_{\mathrm{E}} = -\dfrac{1}{2} + 1 + \dfrac{1}{2} = 1$ donc $\mathrm{E} \in \mathrm{P}$.

Cherchons le point d'intersection de D et de P. Les coordonnées de ce point sont de la forme $(2 - t\,;6 - 2\,t\,;-2 + t)$

$x + y + z = 2 - t + 6 - 2\,t - 2 + t = 6 - 2\,t$ donc $6 - 2\,t = 1$ donc $t = \dfrac{5}{2}$

Le point d'intersection de D et de P a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}\,;1\,;\dfrac{1}{2}\right)$ donc est le point E.

4. Affirmation 4 : VRAIE

$\overrightarrow{AT}\,.\,\overrightarrow{EC} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ET})\,.\,(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GC}) = \overrightarrow{AE}\,.\,\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{AE}\,.\,\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{ET}\,.\,\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{ET}\,.\,\overrightarrow{GC}$

Soit $a = \mathrm{AB}$ alors $\overrightarrow{AT}\,.\,\overrightarrow{EC} = 0 + a^2 + 0 - a^2$ donc $\overrightarrow{AT}\,.\,\overrightarrow{EC} = 0$, les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.