Asie juin 2014

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

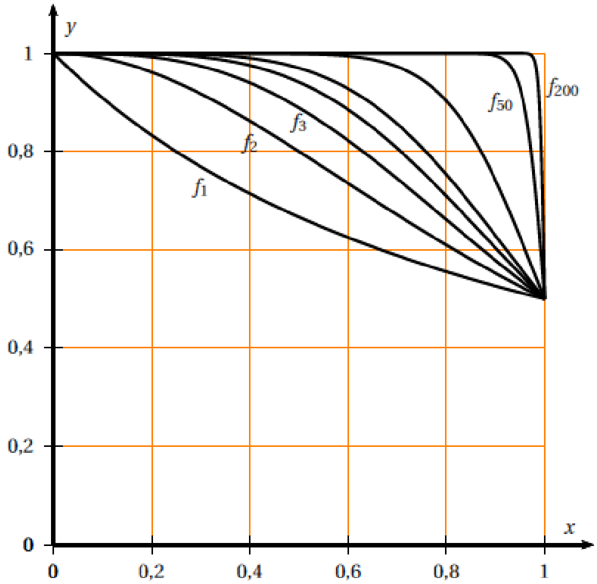
On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] par : $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit le nombre I_n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx.$$

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.

En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.



2. Calculer la valeur exacte de I_1.

3. *a.* Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\dfrac{1}{1+x^n} \leq 1$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n .1, on a :

$$I_n \leq 1.$$

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $1 - x^n \leq \dfrac{1}{1+x^n}$.

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - x^n\right) dx$.

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation	I prend la valeur 0
Traitement	Demander un entier $n \geq 1$ Demander un entier $p \geq 1$ Pour k allant de 0 à $p - 1$ faire : x prend la valeur $\dfrac{k}{p}$ I prend la valeur I + $\dfrac{1}{1+x^n} \times \dfrac{1}{p}$ Fin Pour
Sortie	Afficher I

a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.

CORRECTION

1. Pour tout x de [0 ; 1], $1 + x^n \geq 0$ donc on a : $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \ldots \leq f_{50}(x) \leq f_{200}(x)$ donc les aires comprises entre l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et les courbes sont classées dans le même ordre.
La suite (I_n) semble être croissante et tendre vers 1.

2. $I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2$.

3\. *a.* Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $x^n \geq 0$ donc $1 + x^n \geq 1$ donc $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$

b. Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{1}{1+x^n} \leq 1$ donc

Pour tout entier naturel n .1, on a $\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx \leq \int_0^1 1\,dx$ doit $I_n \leq 1$.

4. Pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on *a* : $(1 - x^n)(1 + x^n) = 1 - x^{2n}$
donc $0 \leq (1 - x^n)(1 + x^n) \leq 1$ donc $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$.

5. $\int_0^1 (1 - x^n)\,dx = \left[x - \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{n+1}$

6. $1 - x^n \leq \frac{1}{1+x^n}$ donc $\int_0^1 (1 - x^n)\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$ donc $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n$ de plus $I_n \leq 1$ donc $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$

$\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \to +\infty} I_n = 1$
La suite (I_n) est convergente et a pour limite 1.

7\. *a.*

k	x	I
0	0	0,2
1	0,2	0,392
2	0,4	0,565
3	0,6	0,712
4	0,8	0,834

b. Il faut reconnaitre dans l'algorithme proposé la méthode des rectangles permettant de calculer des valeurs approchées d'aire sous une courbe ; plus précisément, comme la fonction f_n est décroissante sur [0; 1], on obtient la somme de rectangles majorant l'intégrale I_n cherchée.