Moyennes

On note a et b deux réels strictement positifs.

On définit $m = \dfrac{a+b}{2}$ et $g = \sqrt{ab}$ les moyennes arithmétique et géométrique des nombres a et b.
La moyenne harmonique h des nombres a et b est définie par $\dfrac{2}{h} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.
Montrer que l'on a : $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Partie A

Dans cette partie, on prend $a = 40$ et $b = 10$.

1. Calculer m, g et h.

2. Vérifier que : $a > m > g > h > b$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que $a > b > 0$.
On va démontrer, uniquement par des considérations géométriques, que $a > m > g > h > b$.

1. **a.** Placer sur une droite trois points A, B et C dans cet ordre tels que $\mathrm{AB} = a$ et $\mathrm{BC} = b$.

b. Tracer un demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AC] ; on appelle O son centre.

c. La perpendiculaire à (AC) passant par B coupe $\mathscr{C}$ en M et la perpendiculaire à (OM) passant par B coupe (OM) en G.
Placer les points M et G.

2. Démontrer que $\mathrm{OM} = \dfrac{a+b}{2}$; en déduire que $a > m > b$.

3. **a.** Démontrer que les angles $\widehat{\mathrm{BMC}}$ et $\widehat{\mathrm{MAB}}$ sont égaux.

b. Exprimer la tangente de l'angle $\widehat{\mathrm{MAB}}$ dans le triangle MAB.
Exprimer la tangente de l'angle $\widehat{\mathrm{BMC}}$ dans le triangle BMC.
En déduire que $\mathrm{MB}^2 = \mathrm{AB} \times \mathrm{BC}$ et donc que $\mathrm{MB} = g$.

c. Déduire enfin que $m > g$.

4. **a.** En utilisant des relations trigonométriques dans les triangles rectangles OMB et GMB, démontrer que $\mathrm{MB}^2 = \mathrm{MG} \times \mathrm{MO}$.

b. En déduire que $\mathrm{MG} = h$ puis que $g > h$.

c. Démontrer enfin que $\mathrm{MG} > \mathrm{BC}$, autrement dit que $h > b$.
On pourra utiliser les égalités $\mathrm{MO} = \mathrm{MG} + \mathrm{GO}$ et de $\mathrm{OC} = \mathrm{OB} + \mathrm{BC}$.

5. Conclure.

Moyennes – Correction

$$\frac{2}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \iff \frac{2}{h}=\frac{b+a}{ab} \iff \frac{h}{2}=\frac{ab}{a+b} \iff h=\frac{2ab}{a+b}$$

Partie A

Dans cette partie, on prend $a = 40$ et $b = 10$.

1. $m=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{40+10}{2}=25$; $g=\sqrt{ab}=\sqrt{40\times 10}=\sqrt{400}=20$ et

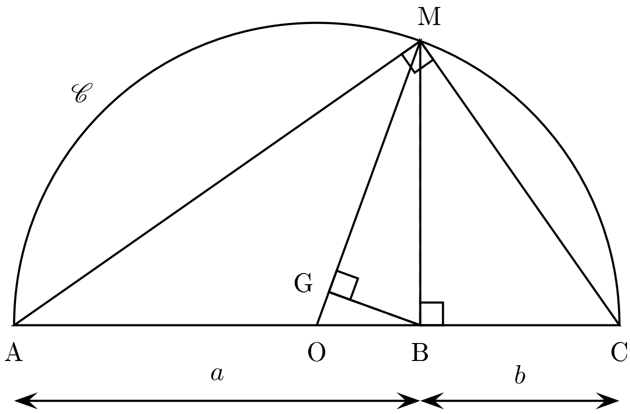
$h=\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{2\times 40\times 10}{40+10}=\dfrac{800}{50}=16$

2. $40 > 25 > 20 > 16 > 10$ donc $a > m > g > h > b$

Partie B

Dans cette partie, on suppose que $a > b > 0$.

1. On construit la figure :



2.
- [AC] est un diamètre du demi-cercle et [OM] est un rayon donc $\mathrm{AC} = 2\,\mathrm{OM}$ ce qui veut dire que $\mathrm{OM}=\dfrac{\mathrm{AC}}{2}$. On peut dire aussi que $\mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} = a + b$.

  Donc $\mathrm{OM}=\dfrac{a+b}{2}$ est la moyenne arithmétique m de a et de b.
- $\mathrm{OM} = \mathrm{OA} < a$ et $\mathrm{OM} = \mathrm{OC} > b$ donc $a > m > b$.

3. **a.** *Rappel* – On appelle « angles complémentaires » deux angles dont la somme des mesures vaut 90°.

- Par construction le triangle MBC est rectangle en B donc les angles $\widehat{\mathrm{BMC}}$ et $\widehat{\mathrm{MCB}}$ sont complémentaires.
- Le triangle AMC est inscrit dans un cercle de diamètre [AC], donc il est rectangle en M ; les angles $\widehat{\mathrm{MAB}}$ et $\widehat{\mathrm{MCB}}$ sont donc complémentaires.
- Des deux points précédents, on déduit :

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{\mathrm{BMC}}+\widehat{\mathrm{MCB}}=90^\circ\\ \widehat{\mathrm{MAB}}+\widehat{\mathrm{MCB}}=90^\circ\end{array}\right\}\text{ donc }\widehat{\mathrm{BMC}}=\widehat{\mathrm{MAB}}$$

b. *Rappel* – Dans un triangle rectangle : tangente (angle non droit) $= \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

- Dans le triangle MAB : $\tan\widehat{\text{MAB}} = \dfrac{\text{MB}}{\text{AB}}$.
- Dans le triangle BMC : $\tan\widehat{\text{BMC}} = \dfrac{\text{BC}}{\text{MB}}$.
- $\widehat{\text{BMC}} = \widehat{\text{MAB}}$ donc $\tan\widehat{\text{BMC}} = \tan\widehat{\text{MAB}}$ ce qui équivaut à $\dfrac{\text{MB}}{\text{AB}} = \dfrac{\text{BC}}{\text{MB}}$ et donc $\text{MB}^2 = \text{AB} \times \text{BC} = ab$.
  Donc $\text{MB} = \sqrt{ab}$ et donc MB est la moyenne géométrique g de a et de b.

c. Dans le triangle OMB rectangle en B, le côté [OM] est l'hypoténuse donc c'est le plus grand côté du triangle donc $\text{OM} > \text{MB}$ et donc $m > g$.

4. **a.** *Rappel* – Dans un triangle rectangle : cosinus (angle non droit) $= \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$.

- Dans le triangle OMB rectangle en B : $\cos\widehat{\text{OMB}} = \dfrac{\text{MB}}{\text{MO}}$.
- Dans le triangle BMG rectangle en G : $\cos\widehat{\text{GMB}} = \dfrac{\text{MG}}{\text{MB}}$.
- Les angles $\widehat{\text{OMB}}$ et $\widehat{\text{GMB}}$ sont les mêmes, donc leurs cosinus sont égaux et donc : $\dfrac{\text{MB}}{\text{MO}} = \dfrac{\text{MG}}{\text{MB}}$ ce qui équivaut à $\text{MB}^2 = \text{MG} \times \text{MO}$.

b.
- $\text{MB}^2 = \text{MG} \times \text{MO}$ donc $\text{MG} = \dfrac{\text{MB}^2}{\text{MO}}$.
- D'après les questions précédentes, $\text{MB}^2 = ab$ et $\text{MO} = m = \dfrac{a+b}{2}$ donc
  $\text{MG} = \dfrac{ab}{\dfrac{a+b}{2}} = \dfrac{2ab}{a+b} = h$ moyenne harmonique de a et de b.
- Dans le triangle MBG rectangle en G, l'hypoténuse est [MB] donc c'est le plus grand côté du triangle ; on en déduit que $\text{MB} > \text{MG} =$ ce qui veut dire que $g > h$.

c. Dans le triangle OGB rectangle en G, l'hypoténuse est [OB] donc c'est le plus grand côté ; donc $\text{GO} < \text{OB}$ ce qui entraîne $\text{MG} + \text{GO} < \text{MG} + \text{OB}$.
$\text{OC} = \text{MO}$ donc $\text{OB} + \text{BC} = \text{MG} + \text{GO}$ donc $\text{OB} + \text{BC} < \text{MG} + \text{OB}$ et donc $\text{BC} < \text{MG}$; on en déduit que $\text{MG} > \text{BC}$ c'est-à-dire $g > h$.

5. On a démontré successivement : $a > m > b$, $m > g$, $g > h$ et $h > b$.
On peut donc en déduire que $a > m > g > h > b$.