Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 (6 points) commun à tous les candidats

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques.

Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

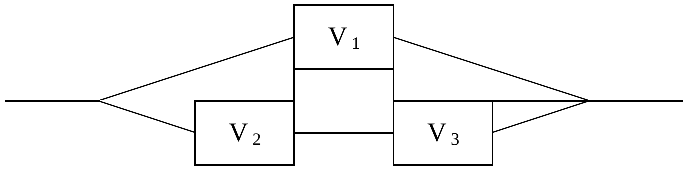
Partie A

La durée de vie d'une vanne, exprimé en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?
2. Calculer la probabilité, à 0,001 près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à 6000 heures.

Partie B

Avec trois vannes identiques V_1, V_2, V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre :
Le circuit est en état de marche si V_1 est en état de marche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.

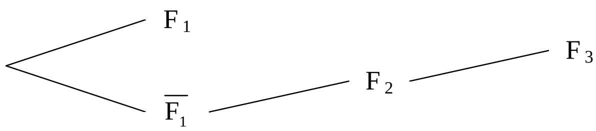


On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6000 heures, on note :

- F_1 l'événement : « La vanne V_1 est en état de marche après 6000 heures » ;
- F_2 l'événement : « La vanne V_2 est en état de marche après 6000 heures »
- F_3 l'événement : « La vanne V_3 est en état de marche après 6000 heures »
- E l'événement : « le circuit est en état de marche après 6000 heures »

On admet que les événements F_1, F_2, F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité est égale à 0,3.

1. L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation.
Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.



2. Démontrer que P(E) = 0,363.
3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment-là. Arrondir au millième.

Partie C

L'industriel affirme que seulement 2 % des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises par la production totale.

1. Déterminer l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable F.
2. On choisit 400 vannes au hasard dans la production. On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400 vannes, avec remise, dans la production.
Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.
Au vu de ce résultat, peut-on remettre en cause, au seuil de 95 % l'affirmation de l'industriel ?

Partie D

Dans cette partie, les probabilités calculées seront arrondies au millième.

L'industriel commercialise ses vannes auprès de nombreux clients. La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale espérance $m = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Déterminer $P(760 \leq D \leq 840)$.
2. Déterminer $P(D \leq 880)$.
3. L'industriel pense que s'il constitue un stock mensuel de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1 % de chances d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?

Exercice 2 (4 points) commun à tous les candidats

Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas pris en compte.

Dans l'espace unique repère orthonormé on considère :

- les points A(12 ; 0 ; 0), B(0 ; – 15 ; 0), C(0 ; 0 ; 20), D (2 ; 7 ; – 6), E (7 ; 3 ; – 3)
- le plan **P** d'équation cartésienne : $2x + y - 2z - 5 = 0$.

Affirmation 1

Une équation cartésienne du plan parallèle à **P** et passant par le point A est : $2x + y + 2z - 24 = 0$

Affirmation 2

Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = 9 - 3t \\ y = 0 \qquad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 5 + 5t \end{cases}$

Affirmation 3

La droite (DE) et le plan **P** ont au moins un point commun.

Affirmation 4

La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 3 (5 points) commun à tous les candidats

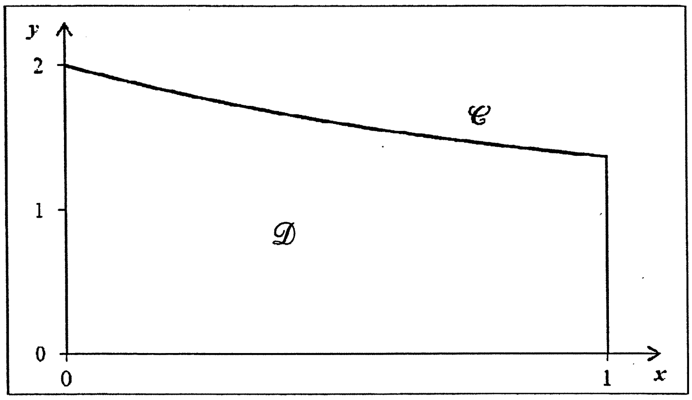
On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] par : $g(x) = 1 + e^{-x}$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] : $g(x) \geq 0$.

On note **C** la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et **D** le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe **C**, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

La courbe **C** et le domaine **D** sont représentés ci-contre.

Le but de cet exercice est de partager le domaine **D** en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (**partie A**), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (**partie B**).



Partie A

Soit a un réel tel que $0 \leq a \leq 1$.

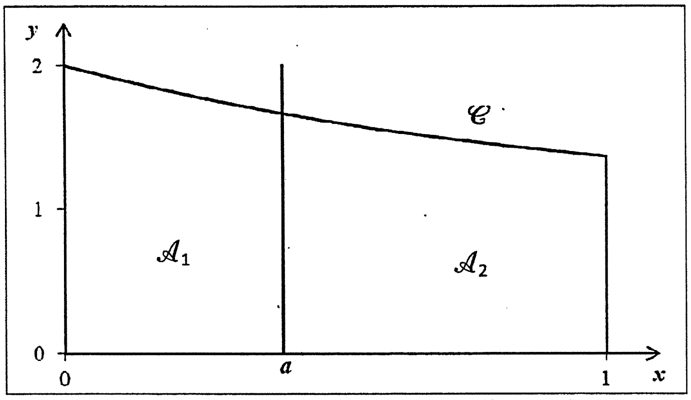
On note A_1 l'aire du domaine compris entre la courbe **C**, l'axe (Ox), les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, puis A_2 celle du domaine compris entre la courbe **C**, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.

A_1 et A_2 sont exprimées en unité d'aire.

1. *a.* Démontrer que $A_1 = a - e^{-a} + 1$.

b. Exprimer A_2 en fonction de a.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] par : $f(x) = 2x - 2e^{-x} + \dfrac{1}{e}$



a. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1]. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle [0 ; 1] en un réel α . Donner la valeur de α arrondie au centième.

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires A_1 et A_2 sont égales.

Partie B

Soit b un réel positif.

Dans cette partie, on se propose de partager le domaine **D** en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier l'inégalité $b < 1 + \dfrac{1}{e}$. On pourra utiliser un argument graphique.

2. Déterminer la valeur exacte du réel b.

Exercice 4 (5 points) Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

Une espèce d'oiseaux ne vit que sur deux îles A et B d'un archipel.

Au début de l'année 1013, 20 millions d'oiseaux de cette espèce pressante sur l'île A et 10 millions sur l'île B.

des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès, immigration entre les deux îles, on retrouve au début de chaque année les proportions suivantes.

Sur l'île A : 80 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 30 % nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente ;

Sur l'île B : 20 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 70 % nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente.

pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île A (respectivement B) au début de l'année (2013 + n).

Partie A algorithmique et conjectures

On donne ci-contre un algorithme qui doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux îles, pour chaque année comprise entre 2013 et une année choisie par l'utilisateur.

Début de l'algorithme
Lire n
Affecter à a la valeur 20
Affecter à b la valeur 10
Affecter à i la valeur 2013
Afficher i
Afficher a
Afficher b
Tant que i < n faire
    Affecter à c la valeur (0,8 a + 0,3 b)
    Affecter à b la valeur (0,2 a + 0,7 b)
    Affecter à a la valeur c
Fin du Tant que
Fin de l'algorithme

1. Cet algorithme comporte des oublis dans le traitement. Repérer ces oublis et les corriger.
2. On donne ci-dessous une copie d'écran des résultats obtenus après avoir corrigé l'algorithme précédent dans un logiciel d'algorithmique, l'utilisateur ayant choisi l'année 2020.

Algorithme lancé En l'année 2013, a prend la valeur 20 et b prend la valeur 10 En l'année 2014, a prend la valeur 19 et b prend la valeur 11 En l'année 2015, a prend la valeur 18,5 et b prend la valeur 11,5 En l'année 2016, a prend la valeur 18,25 et b prend la valeur 11,75 En l'année 2017, a prend la valeur 18,125 et b prend la valeur 11,875 En l'année 2018, a prend la valeur 18,0625 et b prend la valeur 11,9375 En l'année 2019, a prend la valeur 18,03125 et b prend la valeur 11,96875 En l'année 2020, a prend la valeur 18,015625 et b prend la valeur 11,984375 ***Algorithme terminé***

Au vu de ces résultats, émettre des conjectures concernant le sens de variation et la convergence des suite (a_n) et (b_n).

Partie B Partie mathématique

On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M\,U_n$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.

On admet que $U_n = M^n\,U_0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,6+0,4\times 0,5^n & 0,6-0,6\times 0,5^n \\ 0,4-0,4\times 0,5^n & 0,4+0,6\times 0,5^n \end{pmatrix}$$

On ne détaillera le calcul que pour le premier des coefficients de la matrice M^n.

3. Exprimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel $n \geq 1$.
4. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un certain nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser ? Si oui, préciser vers quelle valeur.

Exercice 4 (5 points) Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{n u_n + 1}{2(n+1)}.$$

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de suite, un élève propose l'algorithme ci-contre. a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement :	TANT QUE $n < 9$ Affecter à u la valeur ….. Affecter à n la valeur ….. Fin TANT QUE
Sortie :	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	….	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	…..	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geq 1$; $v_n = n u_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + (0,5)^n}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Justifier que, pour tout entier $n > 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

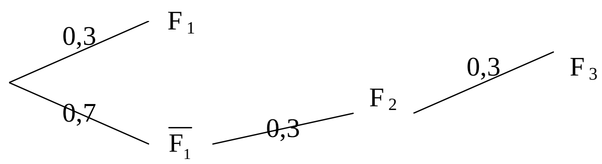
CORRECTION

Exercice 1 (6 points) commun à tous les candidats
Partie A

1. La durée de vie moyenne d'une vanne est $E(T) = \frac{1}{\lambda} = 5\,000$ heures.

2. $P(T \geq 6000) = e^{-\lambda \times 6000} \approx 0{,}301$

Partie B
1.



2. $P(E) = P(F_1) + P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3) = 0{,}3 + 0{,}7 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}363$.

3. $P(F_1 / E) \times P(E) = P(F_1 \cap E) = P(F_1)$ donc $P(F_1 / E) \times 0{,}301 = 0{,}3$ donc $P(F_1 / E) = \frac{0{,}3}{0{,}301} \approx 0{,}997$

Partie C
1. Conditions d'application : $n = 400$ donc $n \geq 30$
$n\,p = 8$ donc $n\,p \geq 5$, $n\,(1 - p) = 392$ donc $n\,(1 - p) \geq 5$
$$I = \left[\ 0{,}02 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}02 \times 0{,}98}{400}}\ ;\ 0{,}02 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}02 \times 0{,}98}{400}}\ \right].$$
$I = [\ 0{,}006\ ;\ 0{,}034\ ]$

2. Dans l'échantillon, $\frac{10}{400} = 0{,}025$ soit 2,5 % des vannes sont défectueuses.
$0{,}025 \in I$ donc on ne peut pas remettre au seuil de 95 % l'affirmation de l'industriel.

Partie D
1. $P(760 \leq D \leq 840) = 0{,}683$
2. $P(D \leq 880) = 0{,}977$
3. La probabilité que l'industriel soit en rupture de stock (donc avoir une demande supérieure à 880 vannes) est $1 - 0{,}977 = 0{,}023$ soit 2,3 % donc l'industriel a tort.

Pour information : pour que la probabilité que l'industriel soit en rupture de stock soit au plus de 0,01, il faut chercher n tel que $P(D \geq n) \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq 894$ vannes.

Exercice 2 (4 points) commun à tous les candidats
Affirmation 1 : Fausse

Le plan **P** a pour vecteur normal $\vec{n}\,(2\ ;\ 1\ ;\ -2)$. Le plan d'équation $2\,x + y + 2\,z - 24 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n'}\,(2\ ;\ 1\ ;\ 2)$.
$\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires donc les deux plans ne sont pas parallèles.

Pour information : Le plan **P**' parallèle à **P** passant par A a pour équation $2\,(x - x_A) + (y - y_A) - 2\,(z - z_A) = 0$ soit $2\,x + y - 2\,z - 24 = 0$.

Affirmation 2 : Fausse

Cherchons si A appartient à la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 9 - 3\,t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5\,t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ soit cherchons s'il existe t tel que

$$\begin{cases} x = 9 - 3\,t = 12 \\ y = 0 \\ z = 5 + 5\,t = 0 \end{cases}.$$

$\begin{cases} 9 - 3\,t = 12 \\ 5 + 5\,t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$ donc $A \in \Delta$

Cherchons si C appartient à la droite Δ soit cherchons s'il existe t tel que $\begin{cases} x = 9 - 3\,t = 0 \\ y = 0 \\ z = 5 + 5\,t = 20 \end{cases}$, $\begin{cases} 9 - 3\,t = 0 \\ 5 + 5\,t = 20 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3$ donc $C \in \Delta$

$A \neq C$ donc $\Delta = (AC)$.

Affirmation 3 Fausse

$\overrightarrow{DE}$ (5 ; – 4 ; 3) donc la droite (DE) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 7 - 4t \\ z = -6 + 3t \end{cases}$

Cherchons les points d'intersection de (DE) et de **P**.
$2x + y - 2z - 5 = 2(2 + 5t) + 7 - 4t - 2(-6 + 3t) - 5 = 0$
$4 + 10t + 7 - 4t + 12 - 6t - 5 = 0 \Leftrightarrow 18 = 0$ donc (DE) et **P** n'ont pas de point d'intersection, (DE) est strictement parallèle à **P**

Affirmation 4 : Vraie
Il est admis implicitement (le texte parle du plan (ABC)) que les points A, B, C ne sont pas alignés.
$\overrightarrow{DE}$ (5 ; – 4 ; 3) est un vecteur directeur de la droite (DE).
$\overrightarrow{AB}$ (– 12 ; – 15 ; 0) et $\overrightarrow{AC}$ (– 12 ; 0 ; 20)
$\overrightarrow{DE} . \overrightarrow{AB} = 5 \times (-12) - 4 \times (-15) = 0$ donc (DE) est orthogonale à (AB)
$\overrightarrow{DE} . \overrightarrow{AC} = 5 \times (-12) + 3 \times 20 = 0$ donc (DE) est orthogonale à (AC).
(DE) est orthogonale à deux droites sécantes (AB) et (AC) du plan (ABC) donc (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 3 (5 points) commun à tous les candidats
Partie A

1. *a*. La fonction g est positive sur [0 ; 1] donc $A_1 = \int_0^a g(x)\,dx$

$A_1 = \left[x - e^{-x} \right]_0^a = a - e^{-a} - (-1)$
$A_1 = a - e^{-a} + 1$.
.

b. $A_2 = \int_a^1 g(x)\,dx = \left[x - e^{-x} \right]_a^1 = 1 - e^{-1} - (a - e^{-a})$
$A_2 = e^{-a} - a + 1 - e^{-1}$.

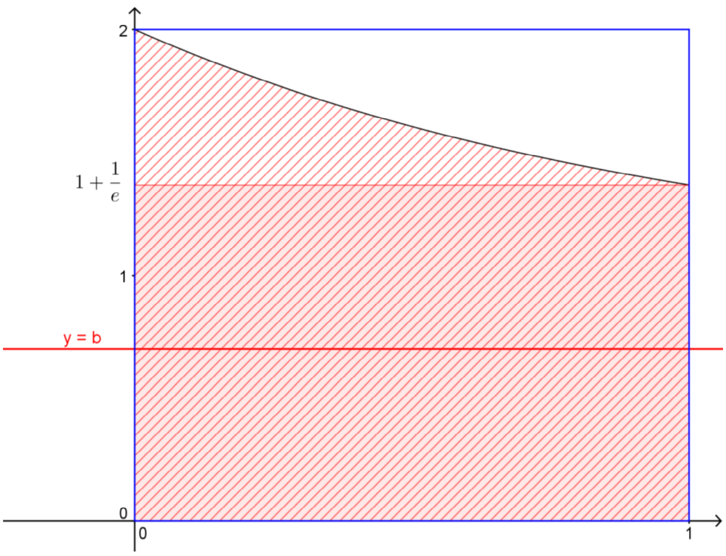
2. *a*. f est dérivable sur [0 ; 1] (somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et $f'(x) = 2 + 2e^{-x}$, la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x) > 0$.
f est strictement croissante sur [0 ; 1].

x	0	1
$f'(x)$	+	
f	$-2 + \frac{1}{e}$ ↗	$2 - \frac{1}{e}$

b. f est définie continue sur [0 ; 1], $f([0;1]) = \left[-2 + \frac{1}{e} ; 2 - \frac{1}{e} \right]$.

$0 \in \left[-2 + \frac{1}{e} ; 2 - \frac{1}{e} \right]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle [0 ; 1].
$f(0{,}45) \approx -0{,}007$ et $f(0{,}46) \approx 0{,}02$ donc $\alpha \approx 0{,}45$

3. $A_1 = a - e^{-a} + 1$ et $A_2 = e^{-a} - a + 1 - e^{-1}$
$A_1 = A_2 \Leftrightarrow a - e^{-a} + 1 = e^{-a} - a + 1 - e^{-1}$
$\Leftrightarrow 2a - 2e^{-a} + e^{-1} = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0$
L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur l'intervalle [0 ; 1] donc $a \approx 0{,}45$



Partie B

1. L'aire du rectangle rose est égale à $1 + \frac{1}{e}$. Cette aire est comprise entre 1 et 1,5.
L'aire hachurée est inférieure à l'aire du rectangle bleu donc à 2
L'aire du domaine inférieur est égale à $B_1 = 1 \times b$.
Si la droite d'équation $y = b$ coupe le domaine en deux domaines de même aire ces deux domaines ont chacun une aire inférieure à 1 donc $b < 1 + \frac{1}{e}$.

2. $B_1 = 1 \times b$ et $A = \int_0^1 g(x)\,dx = \left[x - e^{-x} \right]_0^1 = 1 - e^{-1} - (-1) = 2 - e^{-1}$

$B_1 = B_2 = \frac{1}{2} B \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}(2 - e^{-1}) \Leftrightarrow b = 1 - \frac{1}{2e}$

Exercice 4 (5 points) Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématique
Partie A - Algorithmique et conjectures

1.

Variables	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1
	Affecter à u la valeur 1,5
Traitement :	TANT QUE $n < 9$
	Affecter à u la valeur $(n*u + 1) / (2*(n + 1)$
	Affecter à n la valeur $n + 1$
	Fin TANT QUE
Sortie :	Afficher la variable u

2.

Variables	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1
	Affecter à u la valeur 1,5
Traitement :	TANT QUE $n < 9$
	Affecter à u la valeur $(n*u + 1) / (2*(n + 1)$
	Afficher u
	Affecter à n la valeur $n + 1$
	Fin TANT QUE

3. Au vu des résultats, la suite (u_n) semble être décroissante et converger vers 0.

Partie B - Étude mathématique

1. $v_{n+1} = (n+1)\,u_{n+1} - 1 = (n+1)\,\frac{n u_n + 1}{2(n+1)} - 1$

$v_{n+1} = \frac{n u_n + 1}{2} - 1 = \frac{n u_n - 1}{2}$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - 1 = \frac{1}{2}$ donc $v_n = q^{n-1} v_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0{,}5^n$

2. $v_n = n\,u_n - 1$ donc $n\,u_n = v_n + 1$ donc $u_n = \frac{v_n + 1}{n} = \frac{(0{,}5)^n + 1}{n}$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n = \frac{1 + (0{,}5)^n}{n}$.

3. $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$, or $u_n = \frac{1}{n}(1 + 0{,}5^n)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

4. Soit $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{n u_n + 1}{2(n+1)} - u_n = \frac{n u_n + 1 - 2 n u_n - 2 u_n}{2(n+1)} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{-n u_n - 2 u_n + 1}{2(n+1)}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)} \times \left[-((0{,}5)^n + 1) - 2\frac{(0{,}5)^n + 1}{n} + 1 \right] \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)} \times \left[-\frac{n \times (0{,}5)^n}{n} - \frac{2 \times (0{,}5)^n + 2}{n} \right]$

$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2(n+1)} \times \left[-\frac{n \times (0{,}5)^n + 2 \times (0{,}5)^n + 2}{n} \right] \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)} \times \frac{2 + (n+2) \times (0{,}5)^n}{2}$

$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)} \times \left(1 + \left(\frac{n+2}{2} \right) \times (0{,}5)^n \right) \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)} \times \left(1 + (1 + 0{,}5\,n) \times (0{,}5)^n \right)$

$u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0{,}5\,n)(0{,}5)^n}{n(n+1)}$

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} \times \left(1 + (1 + 0{,}5\,n) \times (0{,}5)^n \right) > 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Partie C - Retour à l'algorithmique

Variables	n est un entier naturel
	u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1
	Affecter à u la valeur 1,5
Traitement :	TANT QUE $u \geq 0{,}001$
	Affecter à u la valeur $(n*u + 1) / (2*(n + 1)$
	Affecter à n la valeur $n + 1$
	Fin TANT QUE
Sortie :	Afficher la variable n

Exercice 4 (5 points) Candidats ayant choisi la spécialité mathématique

Partie A algorithmique et conjectures

1. L'algorithme doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux îles, pour chaque année

```
Début de l'algorithme
Lire n
Affecter à a la valeur 20
Affecter à b la valeur 10
Affecter à i la valeur 2013
Afficher i
Afficher a
Afficher b
Tant que i < n faire
    Affecter à c la valeur (0,8 a + 0,3 b)
    Affecter à b la valeur (0,2 a + 0,7 b)
    Affecter à a la valeur c
    Afficher i (affiche l'année)
    Afficher a (affiche le nombre d'oiseaux sur l'île A cette année là)
    Afficher b (affiche le nombre d'oiseaux sur l'île B cette année là)
Fin du Tant que
Fin de l'algorithme
```

2. Au vu de ces résultats : la suite (a_n) est décroissante et converge vers 18 ; la suite (b_n) est croissante et converge vers 12.

Partie B Partie mathématique

1. $a_{n+1} = 0{,}8\, a_n + 0{,}3\, b_n$ et $b_{n+1} = 0{,}2\, a_n + 0{,}7\, b_n$ donc si $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$ alors pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M\, U_n$.

2. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,6+0,4\times 0,5^n & 0,6-0,6\times 0,5^n \\ 0,4-0,4\times 0,5^n & 0,4+0,6\times 0,5^n \end{pmatrix}$$

Initialisation : si $n = 1$, $\begin{pmatrix} 0,6+0,4\times 0,5^1 & 0,6-0,6\times 0,5^1 \\ 0,4-0,4\times 0,5^1 & 0,4+0,6\times 0,5^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = M^1$, la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, si $M^n = \begin{pmatrix} 0,6+0,4\times 0,5^n & 0,6-0,6\times 0,5^n \\ 0,4-0,4\times 0,5^n & 0,4+0,6\times 0,5^n \end{pmatrix}$ alors $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,6+0,4\times 0,5^{n+1} & 0,6-0,6\times 0,5^{n+1} \\ 0,4-0,4\times 0,5^{n+1} & 0,4+0,6\times 0,5^{n+1} \end{pmatrix}$

$M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 0,6+0,4\times 0,5^n & 0,6-0,6\times 0,5^n \\ 0,4-0,4\times 0,5^n & 0,4+0,6\times 0,5^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$

le premier coefficient de M^{n+1} est égal à

$a_{11} = 0{,}8\,(0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5^n) + 0{,}2 \times (0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}5^n) = 0{,}48 + 0{,}32 \times 0{,}5^n + 0{,}12 \times 0{,}5^n$

$a_{11} = (0{,}48 + 0{,}12) + (0{,}32 - 0{,}12) \times 0{,}5^n \Leftrightarrow a_{11} = 0{,}6 + 0{,}20 \times 0{,}5^n$ or $0{,}20 = 0{,}5 \times 0{,}4 \Leftrightarrow a_{11} = 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}5^n$

$a_{11} = 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}5^{n+1}$.

Les calculs sont analogues pour les trois autres termes.

La propriété est héréditaire donc pour tout entier $n \geq 1$, $M^n = \begin{pmatrix} 0,6+0,4\times 0,5^n & 0,6-0,6\times 0,5^n \\ 0,4-0,4\times 0,5^n & 0,4+0,6\times 0,5^n \end{pmatrix}$

3. $U_n = M^n U_0$ donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

$a_n = 20 \times (0,6 + 0,4 \times 0,5^n) + 10 \times (0,6 - 0,6 \times 0,5^n)$
$a_n = 18 + 8 \times 0,5^n - 6 \times 0,5^n$
$a_n = 18 + 2 \times 0,5^n$.

4. $-1 < 0,5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 18$.

Avec ce modèle, au bout d'un certain nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser à 18 millions d'oiseaux.