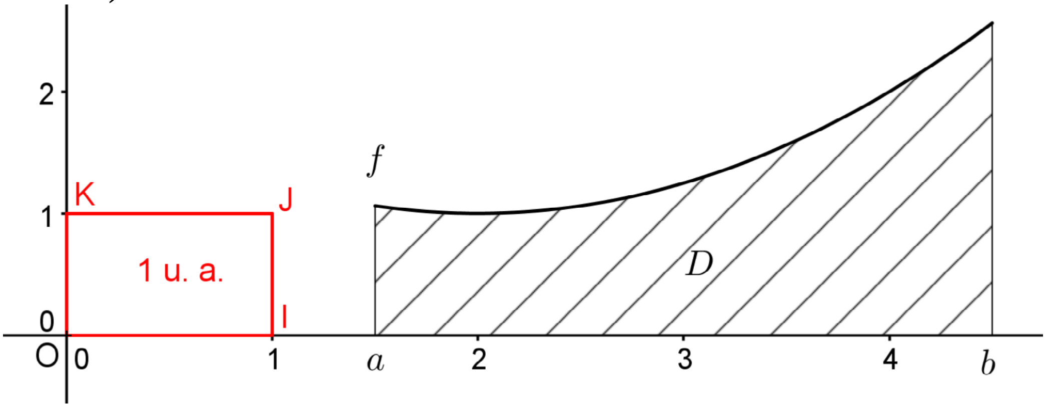
1. Aire et intégrale d'une fonction continue et positive sur [*a* ; *b*]

Définition

L'intégrale de *a* à *b* d'une fonction f **continue et positive** sur [*a* ; *b*] est la mesure de l'« aire sous la courbe » en unités d'aire.

$$\text{aire}(\mathbf{D}) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ ou } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

On appelle unité d'aire (notée en abrégé u. a.) l'unité de mesure des aires telle que Aire(rectangle OIKJ) = 1 u. a.



Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur [*a* ; *b*], la fonction définie sur [*a* ; *b*] par $x \rightarrow \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur [*a* ; *b*] et sa dérivée est la fonction f.

2. Primitives

Définition : La fonction F est une primitive de la fonction f, continue sur I, si et seulement si f est la fonction dérivée de F sur I.

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Propriété : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soit x_0 un élément de I et y_0 un nombre réel.

Il existe une et une seule primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0.

On détermine les primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.
f , u et v désignent des fonctions dérivables sur un intervalle I, k est une constante réelle

f	F
k	$k\,x$
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$ ou $-\frac{1}{n-1}x^{-n+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\tan^2 x + 1$ ou $\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
e^x	e^x
x^{α} ($\alpha > 0$, α réel)	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$

f	F
u'	u
$u'\,u^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$u'\sin u$	$u'\cos u$
$u'\cos u$	$-u'\sin u$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
$\frac{u'}{u^n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$)	$-\frac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}$ ou $-n\frac{1}{n-1}u^{-n-1}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$u'(1 + \tan^2 u)$ ou $\frac{u'}{\cos^2 u}$	$\tan u$
$u'e^u$	e^u
$u'\,u^{\alpha}$ ($\alpha > 0$, α réel)	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

Opérations

f	f'
$k\,u$	$k\,U$
$u + v$	$U + V$

où U et V sont respectivement des primitives de u et v.

3. Primitives et intégrales d'une fonction continue

Définition

Soit f une fonction définie continue sur intervalle $[a\,;\,b]$, et F une de ses primitives, on appelle intégrale de a à b de la fonction f, le nombre réel $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur [a ; b], la fonction définie sur [a ; b] par $x \to \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f s'annulant en a.

Dans les propriétés suivantes, les fonctions sont continues sur un intervalle I, les nombres réels a, b et c sont dans I, les nombres λ et μμ sont deux réels quelconques.

Propriétés

- $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ (Relation de Chasles)
- si λ et μ sont deux réels : $\int_a^b \left(\lambda\, f(t) + \mu\, g(t)\right)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
- Si $a \leq b$ et si pour tout x de [a ; b] on a $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$ (positivité)
- Si $a \leq b$ et si pour tout x de [a ; b] on a $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ (comparaison)

Valeur moyenne

On appelle valeur moyenne de f sur [a ; b], le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème de la moyenne

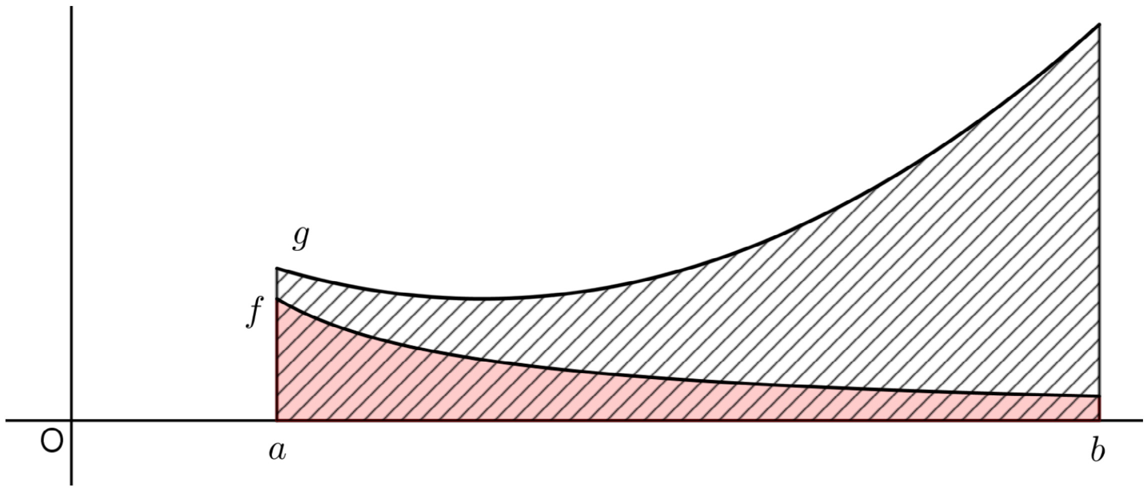
S'il existe deux réels m et M tels que pour tout x de [a ; b], $m \leq f(x) \leq \mathrm{M}$ alors $m\,(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{M}\,(b-a)$

ou encore $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{M}$

4. Application Aire entre deux courbes

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle [a ; b], telles que, pour tout t de [a ; b], $f(t) \leq g(t)$.

L'aire du domaine **D** limité par la courbe représentative de f, celle de g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, mesure $\int_a^b \left(g(t) - f(t)\right)\mathrm{d}t$ en unités d'aire.



g
f
O
a
b