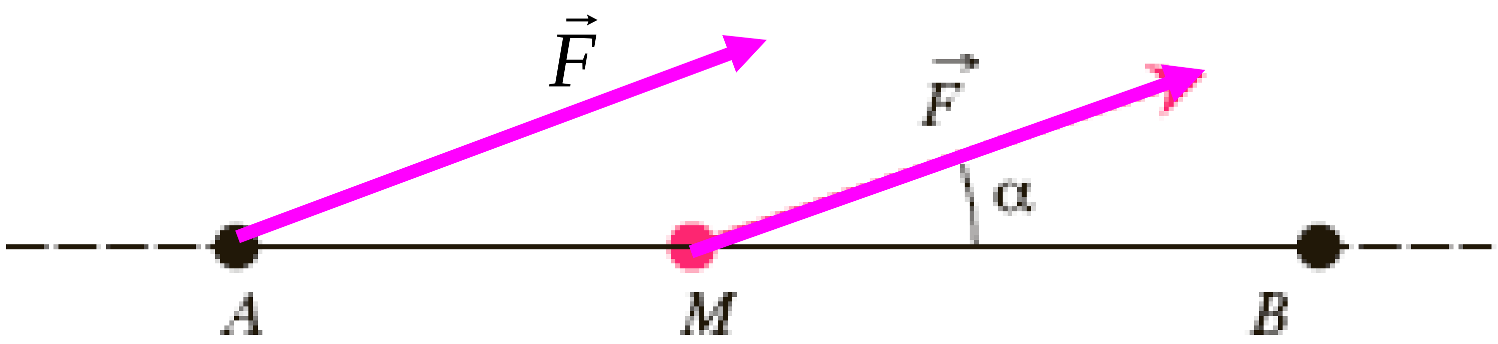
3. Énergie

Travail d’une force constante

Définition : Le travail d'une force constante (vecteur) lorsque son point application se déplace de A à M est défini par :

$$W = \vec{F}.\overrightarrow{AM} = F.AM.\cos\alpha$$

Unité SI : le Joule (1N.1m)



Le travail mesure l’énergie nécessaire pour déplacer un corps en lui appliquant la force $\vec{F}$

Travail d'une force variable : cas d'une force élastique

Lorsque la force est variable pendant le déplacement, on calcule d'abord le travail élémentaire effectué sur un déplacement suffisamment petit δx :

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{\delta x}$$

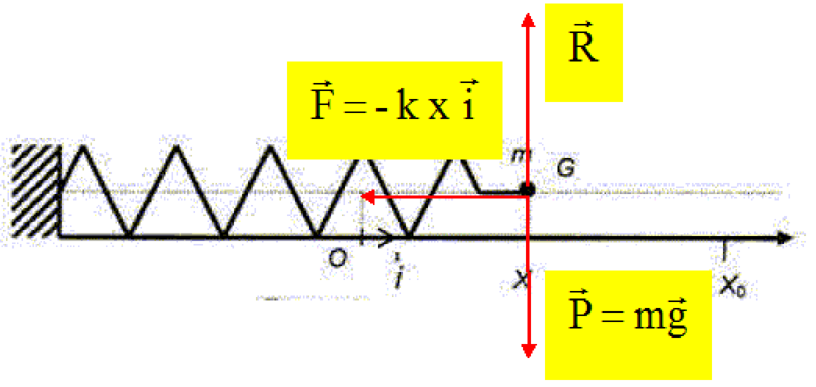
Le travail total est calculé ensuite en faisant la somme des travaux élémentaires.

Exemple : travail de la force de rappel d'un ressort (force élastique)

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

$$\delta W = -kx\delta x$$

$$W_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$$



Le travail de la force élastique du ressort ne dépend que des positions finale et initiale. Il ne dépend pas des positions intermédiaires.

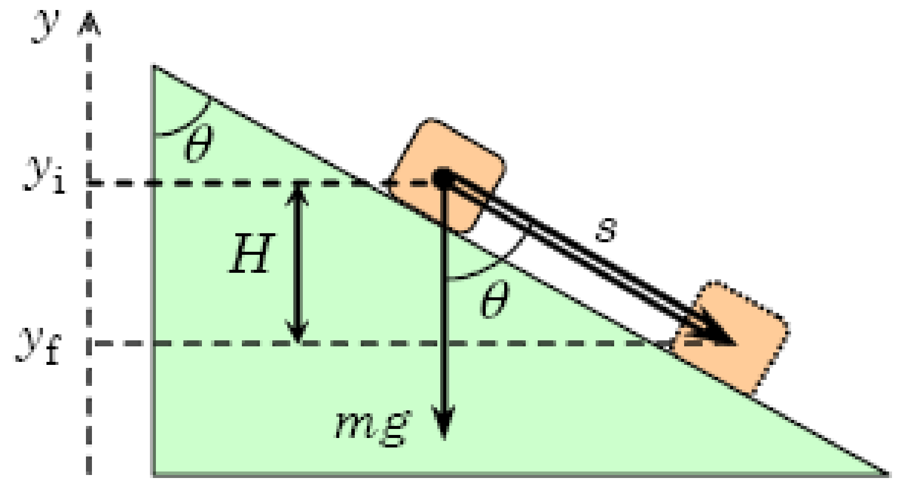
Travail du poids

Le poids est constant.

$$W_{y_i}^{y_f} = m\vec{g}.\vec{s} = mg.s\cos\theta$$

$$s\cos\theta = y_i - y_f$$

$$W_{y_i}^{y_f} = -mg(y_f - y_i) = -mg\Delta y$$



Le poids descend : *Δh<0* , W>0 le travail est moteur : la masse reçoit de l'énergie.

Le poids monte *Δh>0*, W< le travail est résistant : on doit soulever la masse (apport d'énergie) pour effectuer le déplacement

Le travail du poids ne dépend que des positions finale et initiale. Il ne dépend pas du chemin suivi.

Puissance

La puissance mesure la rapidité avec laquelle le travail est effectué

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

Unité SI : le Watt (1Joule/seconde)

Pour un déplacement en translation :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{l}}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

Pour un déplacement en rotation (couple) :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.rd\theta\vec{u}_{\theta}}{dt} = Fr.\frac{d\theta}{dt} = C\Omega$$

Énergie potentielle

C'est une énergie liée à la position du corps.

Travail du poids

$$W_A^B = mg(z_A - z_B) = E_p^A - E_p^B$$

$$\boxed{W_1^2 = E_p^1 - E_p^2}$$

$$E_p = mgz \text{ est l'énergie potentille de gravitation}$$

Travail de la force élastique du ressort

$$W_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2) = E_p^1 - E_p^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \text{ est l'énergie potentielle élastique du ressort}$$

<u>Forces conservatives</u> : Forces dont le travail ne dépend que des positions initiale et finale du corps. Il est égal à la diminution de l'énergie potentielle

Énergie potentielle, stabilité de l'équilibre

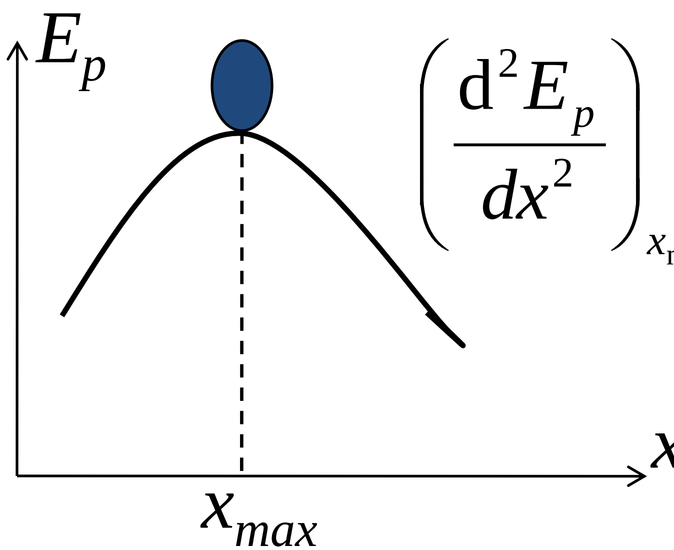
Équilibre d'un point matériel dans un champ de forces d'énergie potentielle E_p

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow \left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_0} = 0 \rightarrow E_p \text{ minimum ou maximum}$$

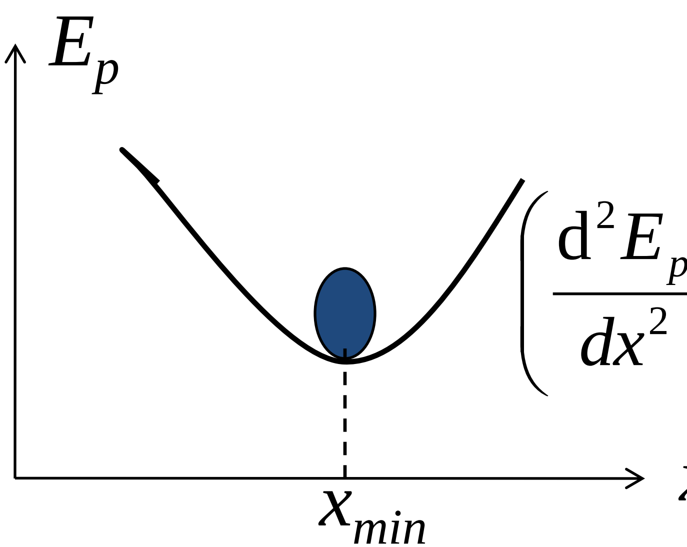
$$E_p \text{ min, } x_0 \text{ position d'équilibre stable et } \left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{dx^2}\right)_{x_0} > 0$$

$$E_p \text{ max, } x_0 \text{ position d'équilibre instable et } \left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{dx^2}\right)_{x_0} < 0$$

Énergie potentielle, stabilité de l'équilibre



$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{dx^2}\right)_{x_{\max}} < 0$$



$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{dx^2}\right)_{x_{\min}} > 0$$

Théorème de l'énergie cinétique

Énergie liée au mouvement du corps

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Théorème de l'énergie cinétique

$$\boxed{\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c = \sum W_{A \to B}(\vec{F}_{ext})}$$

La variation de l'énergie cinétique d'un corps entre deux positions A et B est égale à la somme des travaux des forces extérieures appliquées lorsque le corps se déplace de la position A à la position B

Énergie mécanique

D'après le théorème de l'énergie cinétique

$$\boxed{E_c(B)-E_c(A)=\sum W_{A\to B}(\vec{F}_{ext})=W(\vec{F}_{conserv})+W(\vec{F}_{non\ conserv})}$$

Le travail des forces conservatives est égal à la diminution de l'énergie potentielle

$$W(\vec{F}_{cons})=E_p(A)-E_p(B)$$

$$E_c(B)-E_c(A)=E_p(A)-E_p(B)+W(\vec{F}_{noncons})$$

L'énergie mécanique est définie par :

$$\boxed{E_{méc}=E_c+E_p}$$

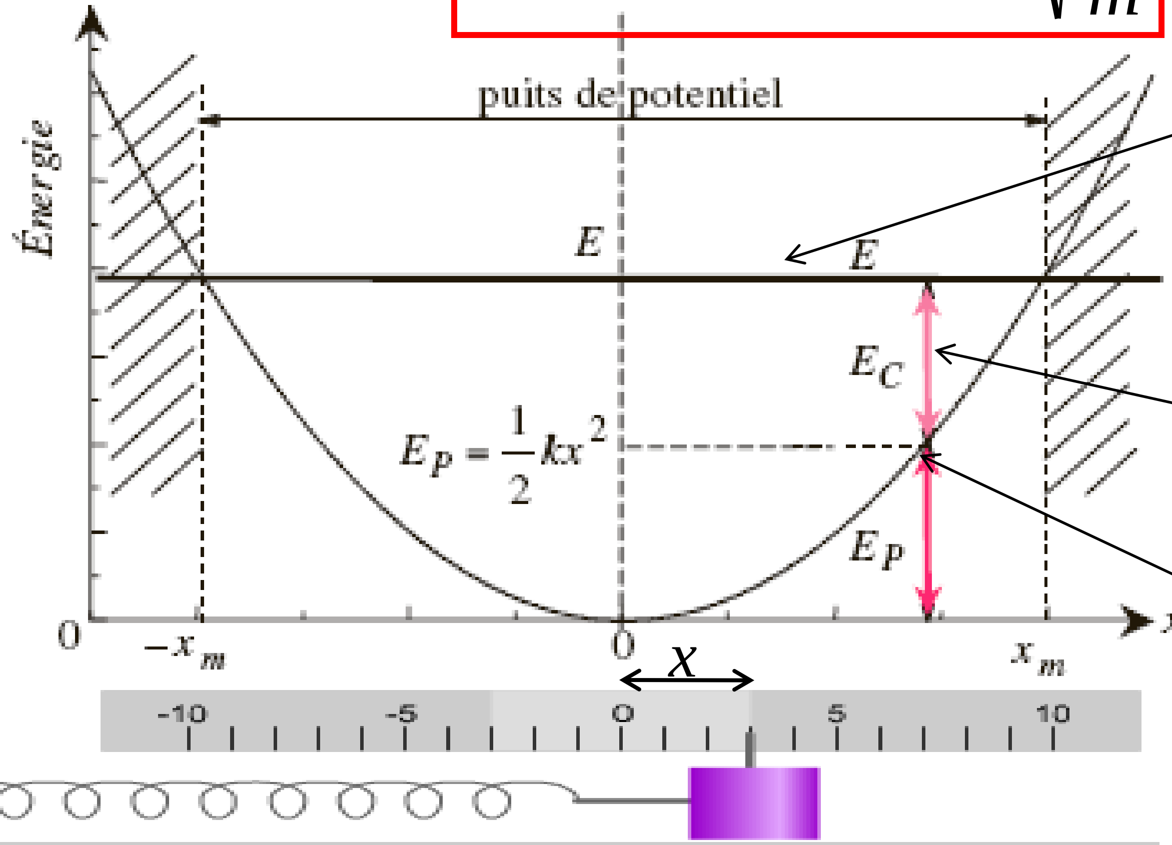
<u>Théorème</u> : La variation de l'énergie mécanique est égale au travail des forces non conservatives (frottement). Pour un système isolé l'énergie mécanique se conserve, c'est une fonction d'état

Exemple 1 : ressort *(masse m et constante élastique k)*

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

$$\boxed{x = x_m \cos \omega t \;;\; \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\boxed{v = \dot{x} = x_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$



$$E_m(x) = E_c(x) + E_p(x)$$

$$E_m(x) = Cste$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

Pour $x = \pm x_m$

$$E_c = 0 \;;\; E_m = E_p = \frac{1}{2} k x_m^2$$

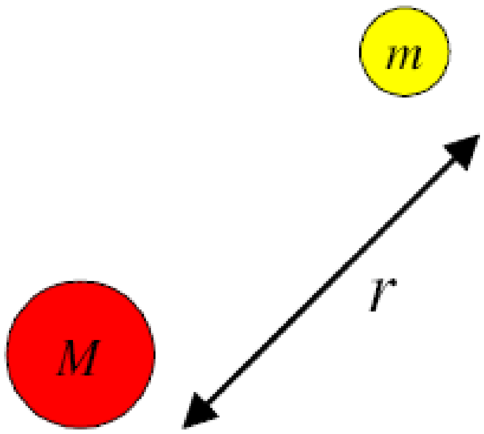
Pour $x = 0$

$$E_p = 0 \;;\; E_m = E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Exemple 2 : mécanique céleste

Énergie potentielle gravitationnelle de 2 masses

$$E_p = -G\frac{mM}{r}$$



<u>Vitesse de libération</u> : vitesse initiale pour libérer *m* de l'attraction de *M*

État initial : $r=R_M$ *et* $v=v_0$
État final : $r=\infty$; $v=0$
Conservation de l'énergie mécanique

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_M}}$$

Pour la terre
v_0=11 180 m/s
=40 259 km/h

Cours Maisonneuve, 3.6 Energie gravitationnelle des astres

Mécanique terrestre

Référentiel terrestre : Terre + enveloppe gazeuse

Notre vitesse /réf géocentrique

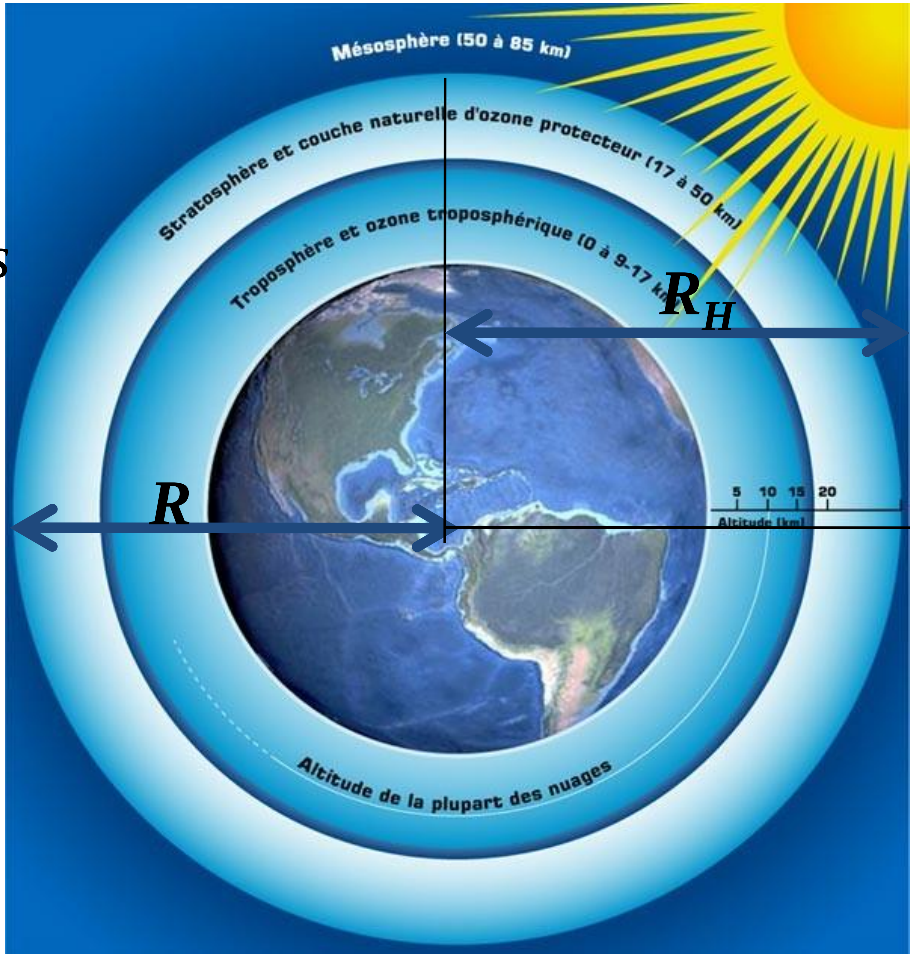
$$v = \omega R_H = \frac{2\pi}{T} R_H \; ; A \; l'équateur \; v = 2\pi \frac{6400}{24} = 1674 \, km/h$$

Dans l'atmosphère, les corps (avions, objets volants) qui se déplacent sont liés à la terre et suivent le même mouvement de rotation. Ils subissent 2 forces : Poids P et force d'inertie centrifuge F.

A l'équateur :

$$P = \frac{GM_T}{R^2} m \; ; \; F = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_H$$

$$\frac{P}{F} = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2 R^2 R_H} \approx 185 \,(\text{équateur})$$



Notes historiques : [Galilée]; [Copernic]