Nouvelle Calédonie, Wallis et Futuna Février 2018

Exercice 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la réponse correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 36. On a alors, à 10^{-3} près :

a. $P(X \leq 81{,}2) \approx 0{,}542$ **b.** $P(X \leq 81{,}2) \approx 0{,}301$

c. $P(81{,}2 \leq X \leq 103{,}8) \approx 0{,}542$ **d.** $P(81{,}2 \leq X \leq 103{,}8) \approx 0{,}301$

2. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart-type 2.
Une variable aléatoire N suit la loi normale centrée réduite. On a alors :

a. $P(X > 52) = \dfrac{1 - P(-2 < N < 2)}{2}$ **b.** $P(X > 52) = 1 - P(-2 < N < 2)$

c. $P(X > 52) = \dfrac{1 - P(-1 < N < 1)}{2}$ **d.** $P(X > 52) = 1 - P(-1 < N < 1)$

3. Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle telle que $P(T > 2) = 0{,}5$.
Une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $P_{(T > 2)}(T > 5)$ est égale à :

a. 0,35 **b.** 0,54 **c.** 0,53 **d.** $\dfrac{e}{2}$

4. Une urne contient 5 boules bleues et 3 boules grises indiscernables au toucher.
On tire successivement de manière indépendante 5 boules avec remise dans cette urne. On note alors X la variable aléatoire comptant le nombre de boules grises tirées. On note E(X) l'espérance de X. On a alors :

a. $E(X) = 3$ **b.** $E(X) = \dfrac{3}{8}$

c. $P(X \geq 1) \approx 0{,}905$ à 10^{-3} près **d.** $P(X \geq 1) \approx 0{,}095$ à 10^{-3} près

CORRECTION

1. b. VRAI

A la calculatrice : $P(X \leq 81{,}2) \approx 0{,}301$

2. c. VRAI

$N = \dfrac{X - 50}{2}$, $P(X > 52) = P\left(N > \dfrac{52 - 50}{2}\right) = P(N > 1)$

N suit une loi normale centrée réduite donc $P(N > 1) = P(N < -1)$ et $P(N < -1) + P(-1 < N < 1) + P(N > 1) = 1$

soit $P(-1 < N < 1) + 2\,P(N > 1) = 1$ donc $P(N > 1) = \dfrac{1 - P(-1 < N < 1)}{2}$ donc $P(X > 52) = \dfrac{1 - P(-1 < N < 1)}{2}$

3. a. VRAI

Une variable aléatoire T suit une loi exponentielle telle que $P(T > 2) = 0{,}5$ donc $e^{-2\lambda} = 0{,}5$ où λ est le paramètre de la loi

donc $-2\lambda = \ln 0{,}5 = -\ln 2$ soit $\lambda = \dfrac{\ln 2}{2}$

Une loi exponentielle est une loi sans vieillissement donc $P_{(T > 2)}(T > 5) = P(T > 5 - 2) = e^{-3\lambda}$ soit approximativement 0,35.

4. c. VRAI

Une urne contient 5 boules bleues et 3 boules grises indiscernables au toucher.
On tire successivement de manière indépendante 5 boules avec remise dans cette urne. On note alors X la variable aléatoire comptant le nombre de boules grises tirées. On note E(X) l'espérance de X. On a alors :
On a une succession de 5 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- réussite : la boule est grise, ($p = \dfrac{3}{8}$)
- échec : la boule n'est pas grise ($q = \dfrac{5}{8}$)

donc la variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $\left(5\,;\dfrac{3}{8}\right)$. $E(X) = n\,p = 5 \times \dfrac{3}{8}$ donc a et b faux.

$P(X \leq 1) = 0{,}095$ donc $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ soit $P(X \geq 1) \approx 0{,}905$ à 10^{-3} près