Antilles Guyane septembre 2007

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche, ou rouge.
On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne.
On tire au hasard simultanément 2 boules dans l'urne et on note leur couleur.
Soit l'évènement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

Partie A

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules banches.
Calculer la probabilité de l'évènement G.

Partie B

On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. On note $g(n, b, r)$ la probabilité en fonction de n, b et r de l'évènement G.

Démontrer que : $g(n, b, r) = \frac{1}{210}[n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)]$.

2. Le but de cette question est de déterminer n, b et r afin que la probabilité $g(n, b, r)$ soit minimale.

L'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal.

Soient les points N, B et R de coordonnées respectives (15 ; 0 ; 0), (0 ; 15 ; 0) et (0 ; 0 ; 15) et soit M le point de coordonnées (n, b, r).
On pourra se rapporter à la figure ci-dessous.

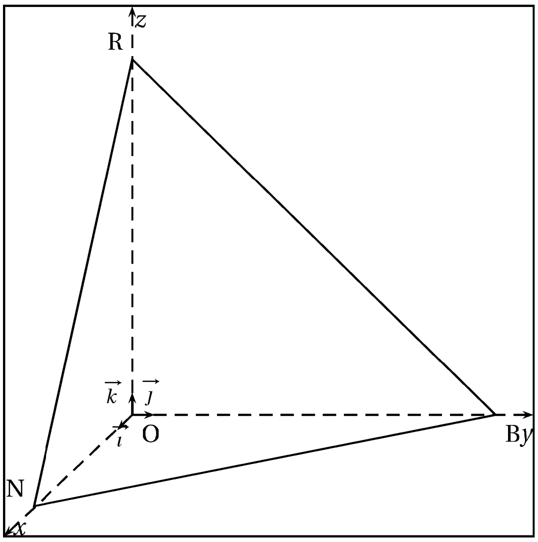
a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est $x + y + z - 15 = 0$.

b. En déduire que le point M est un point du plan (NBR).

c. Démontrer que $g(n, b, r) = \frac{1}{210}(OM^2 - 15)$.

d. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR). Déterminer les coordonnées du point H.

e. En déduire les valeurs de n, b et r afin que la probabilité $g(n, b, r)$ soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à $\frac{2}{7}$.



Partie C

On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'évènement G soit $\frac{2}{7}$.

Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ.
S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon, il ne reçoit rien.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Calculer l'espérance E(X) de la variable X en fonction de x et de k.
2. Déterminer la valeur de k pour laquelle le jeu est équitable.

EXERCICE 2 5 points Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Déterminer le nombre complexe α tel que : $\begin{cases} \alpha(1+\mathrm{i}) = 1+3\,\mathrm{i} \\ \mathrm{i}\,\alpha^2 = -4+3\,\mathrm{i} \end{cases}$

2. Pour tout nombre complexe z, on pose : $f(z) = z^2 - (1 + 3\,\mathrm{i})\,z + (-4 + 3\,\mathrm{i})$.
Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z - \alpha)(z - \mathrm{i}\,\alpha)$.
En déduire les solutions sous forme algébrique de l'équation $f(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 5 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = 2 + \mathrm{i}$ et $b = -1 + 2\,\mathrm{i}$.
Placer A et B dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.

Montrer que $b = \mathrm{i}\,\alpha$, en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. On considère le point C d'affixe $c = -1 + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

Déterminer l'affixe du point D tel que le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \dfrac{\pi}{2}$.

On pourra conjecturer l'affixe de D à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.

3. Soit M le milieu de [CB]. On appelle $z_{\overrightarrow{OM}}$ et $z_{\overrightarrow{DA}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{DA}$.

Prouver que : $\dfrac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}} = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

4. Donner une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{OM})$.

5. Prouver que $OM = \dfrac{1}{2}DA$.

6. On appelle J, K et L les milieux respectifs des segments [CD], [DA] et [AB].
On admet que le quadrilatère JKLM est un parallélogramme. Démontrer que c'est un carré.

EXERCICE 2 5 points Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Soit t un nombre réel fixe et soient les points M, N et P, deux à deux distincts, définis par $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = t\,\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CP} = t\,\overrightarrow{CA}$.

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P, et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ direct.

On note a, b, c, m, n et p, les affixes respectives des points A, B, C, M, N et P.

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

a. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c et t .

b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.
On notera G ce centre de gravité.

c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ.

2. On considère la rotation r de centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

a. Vérifier que M est le barycentre du système de points $\{A(1 - t)\,;\,B(t)\}$, et en déduire que $r(M) = N$.
On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.

b. Soit σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{GM}{GA}$ et d'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM})$.
Montrer qu'elle transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P.

c. Conclure sur l'existence et l'unicité de σ.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Question de cours

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I.
Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ de I.

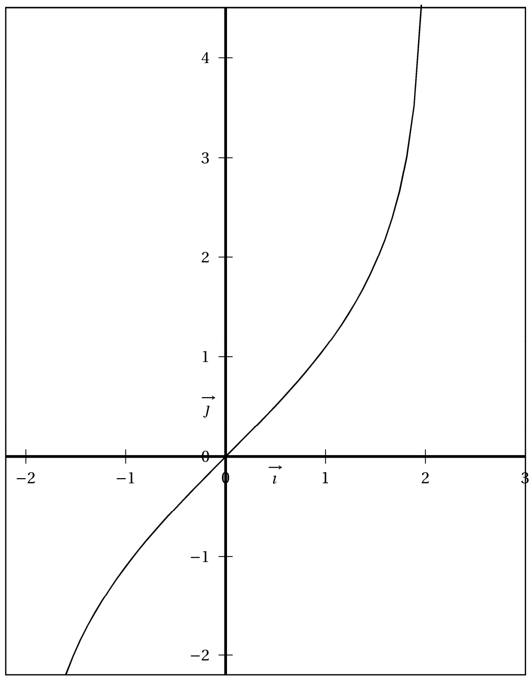
Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. On note f' la fonction dérivée de f.
On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0 : 1]$.

1. Utiliser la question de cours pour montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 x\,f'(x)\,\mathrm{d}x$$

2. En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 (f(x) - f(1))\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\,f'(x)\,\mathrm{d}x$



Partie B

On désigne par ln la fonction logarithme népérien.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. *a*. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ on a :

$$f'(x) = \frac{4}{4-x^2}.$$

b. En déduire les variations de f sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$.

Partie C

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée sur la feuille annexe.
Hachurer sur cette feuille la partie P du plan constituée des points $\mathrm{M}(x\ ;\ y)$ tels que $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) \leq y \leq \ln 3$.
En utilisant la partie A, calculer en cm^2 l'aire de P .

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

Soit $v = (v_n)_{n \geq 0}$ une suite. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^{-v_n} + 1$.

Partie A

Pour chacune des questions, quatre propositions sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chacune des questions donner, sans justification, la bonne réponse sur votre copie.
Une bonne réponse donne 0,75 point, une mauvaise réponse enlève 0,25 point et l'absence de réponse est comptée 0 point.
Tout total négatif est ramené à zéro.

1. a est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien.

Si $v_0 = \ln a$ alors :

a. $u_0 = \dfrac{1}{a} + 1$ *b*. $u_0 = \dfrac{1}{a+1}$ *c*. $u_0 = -a + 1$ *d*. $u_0 = \mathrm{e}^{-a} + 1$

2. Si v est strictement croissante, alors :

a. u est strictement décroissante et majorée par 2
b. u est strictement croissante et minorée par 1
c. u est strictement croissante et majorée par 2
d. u est strictement décroissante et minorée par 1

3. Si v diverge vers $+\infty$, alors :

a. u converge vers 2
b. u diverge vers $+\infty$
c. u converge vers 1
d. u converge vers un réel ℓ tel que $\ell > 1$

4. Si v est majorée par 2, alors :

a. u est majorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$
b. u est minorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$
c. u est majorée par $1 + \mathrm{e}^{2}$
d. u est minorée par $1 + \mathrm{e}^{2}$

Partie B (1 point)

Démontrer que pour tout entier naturel non nul, on a $\ln(u_n) + v_n > 0$.

CORRECTION

EXERCICE 1 6 points Commun à tous les candidats

Partie A

L'urne contient 3 boules noires et 7 boules banches et donc 15 – (7 + 3) = 5 boules rouges.

On est en situation d'équiprobabilité, le nombre de cas possibles est $\binom{15}{2} = 105$

Si l'on obtient deux boules de même couleur on a soit 2 boules blanches (nombre de cas favorables $\binom{3}{2} = 3$) soit 2 boules noires (nombre de cas favorables $\binom{7}{2} = 21$) soit 2 boules rouges (nombre de cas favorables $\binom{5}{2} = 10$) donc le nombre ce cas favorables est 3 + 21 + 10 = 34 donc $p(G) = \frac{34}{105}$.

Partie B

1. L'urne contient n boules noires et b boules banches et r boules rouges.

On est en situation d'équiprobabilité, le nombre de cas possibles est $\binom{15}{2} = 105$

Si l'on obtient deux boules de même couleur on a soit 2 boules blanches (nombre de cas favorables $\binom{b}{2} = \frac{b(b-1)}{2}$) soit 2 boules noires (nombre de cas favorables $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$) soit 2 boules rouges (nombre de cas favorables $\binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2}$) donc le nombre ce cas favorables est $\frac{b(b-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{1}{2}[n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)]$

donc $p(G) = \frac{1}{105} \times \frac{1}{2}[n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)]$ donc $g(n, b, r) = \frac{1}{210}[n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)]$.

2. *a*. Soit P le plan d'équation $x + y + z - 15 = 0$. Les coordonnées de N, B, R vérifient cette équation donc ces trois points appartiennent au plan P, $\overrightarrow{NB}$ a pour coordonnées (– 15 ; 15 ; 0) et $\overrightarrow{NR}$ a pour coordonnées (– 15 ; 0 ; 15), ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points N, B, R définissent un plan donc P = (NBR) une équation cartésienne du plan (NBR) est $x + y + z - 15 = 0$.

b. L'urne contient 15 boules donc n + b + r = 15 donc le point M est un point du plan (NBR).

c. $OM^2 = n^2 + b^2 + r^2$ or $g(n, b, r) = \frac{1}{210}[n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)] = \frac{1}{210}[n^2 - n + b^2 - b + r^2 - r]$

donc $g(n, b, r) = \frac{1}{210}[n^2 + b^2 + r^2 - (n + b + r)] = \frac{1}{210}[n^2 + b^2 + r^2 - 15] = \frac{1}{210}(OM^2 - 15)$.

d. Un vecteur normal au plan (NBR) est le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; 1 ; 1). H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR) donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{OH} = k\vec{n}$ donc H a pour coordonnées (k ; k ; k).

$H \in$ (NBR) donc k + k + k – 15 = 0 soit 3 k – 15 = 0 donc k = 5, les coordonnées du point H dont (5 ; 5 ; 5)

e. $g(n, b, r) = \frac{1}{210}(OM^2 - 15)$. La probabilité $g(n, b, r)$ est minimale quand OM^2 est minimale.

La distance minimale du point O à un point M du plan (NBR) est la distance de O au projeté orthogonal de O sur ce plan soit H, donc $g(n, b, r)$ est minimal quand M = H soit quand n = b = r = 5.

La probabilité minimale est égale à $\frac{1}{210}(5^2 \times 3 - 15) = \frac{60}{210} = \frac{2}{7}$.

Partie C

1. Si deux boules de même couleur sortent, le joueur gagne $k\,x$ et perd x donc le gain est x (k – 1) et dans le cas contraire le « gain » sera de $-x$. La loi de probabilité de X est :

f	– x	x (k – 1)	Total
p(X = f)	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	1
f p(X = f)	$-x\,\frac{5}{7}$	$x(k-1) \times \frac{2}{7}$	$-x\,\frac{5}{7} + x(k-1) \times \frac{2}{7} = \frac{1}{7}x[2k-7]$

$E(X) = \frac{1}{7}x[2k-7]$

2. le jeu est équitable quand E(X) = 0 soit quand $k = \frac{7}{2}$.

EXERCICE 2 5 points Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. $\alpha\,(1 + i) = 1 + 3\,i \Leftrightarrow \alpha\,(1 + i)\,(1 - i) = (1 + 3\,i)\,(1 - i) \Leftrightarrow 2\,\alpha = 4 + 2\,i \Leftrightarrow \alpha = 2 + i$

$\alpha^2 = (2 + i)^2 = 4 + 4\,i - 1 = 3 + 4\,i$ donc $i\,\alpha^2 = -4 + 3\,i$ donc la solution de $\begin{cases} \alpha(1+i) = 1+3i \\ i\,\alpha^2 = -4+3i \end{cases}$ est $\alpha = 2 + i$

2. Pour tout nombre complexe z, $(z - \alpha)\,(z - i\,\alpha) = z^2 - z\,(i\,\alpha + \alpha) + i\,\alpha^2 = z^2 - z\,\alpha\,(1 + i) + i\,\alpha^2$

or $\begin{cases} \alpha(1+i) = 1+3i \\ i\,\alpha^2 = -4+3i \end{cases}$ donc $(z - \alpha)\,(z - i\,\alpha) = z^2 - (1 + 3\,i)\,z + (-4 + 3\,i)$ donc on pose : $f(z) = (z - \alpha)\,(z - i\,\alpha)$

$f(z) = 0 \Leftrightarrow (z - \alpha)\,(z - i\,\alpha) = 0 \Leftrightarrow z = \alpha$ ou $z = i\,\alpha \Leftrightarrow z = 2 + i$ ou $z = -1 + 2\,i$

Partie B

1. $i\,\alpha = i\,(2 + i) = -1 + 2\,i = b$

$b = i\,\alpha$ donc $|\,b\,| = |\,i\,\alpha\,| = |\,\alpha\,|$ donc OA = OB et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\dfrac{b}{a}\right)$ donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg i$ donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}$.

2. On considère le point C d'affixe $c = -1 + \dfrac{1}{2}i$.

Si le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \dfrac{\pi}{2}$ alors D est l'image de C par la rotation de centre O d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ donc $d = i\,c = -\dfrac{1}{2} - i$

3. M est le milieu de [CB] donc $z_{\overrightarrow{OM}} = \dfrac{1}{2}(b + c) = -1 + \dfrac{5}{4}i$

$z_{\overrightarrow{DA}} = d - a = -\dfrac{5}{2} - 2\,i$ donc $\dfrac{1}{2}i\ z_{\overrightarrow{DA}} = -1 + \dfrac{5}{4}i = z_{\overrightarrow{OM}}$ donc : $\dfrac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}} = \dfrac{1}{2}i$.

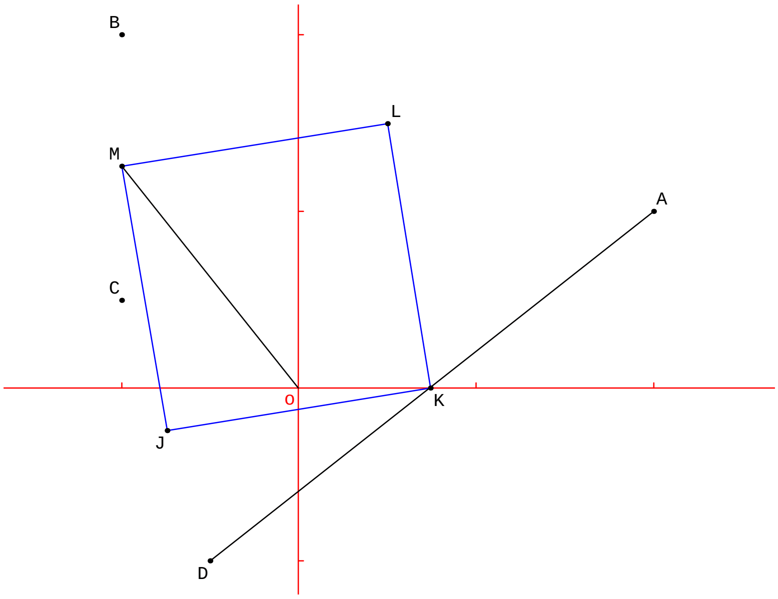
4. $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{OM}) = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}}\right)$ donc $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{\pi}{2}$

5. $\dfrac{1}{2}i\,z_{\overrightarrow{DA}} = z_{\overrightarrow{OM}}$ donc $\dfrac{1}{2}\,|\,z_{\overrightarrow{DA}}\,| = |\,z_{\overrightarrow{OM}}\,|$ donc $OM = \dfrac{1}{2}DA$.

6. J est le milieu de [CD] donc a pour affixe $\dfrac{1}{2}(c + d) = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}i$. K est le milieu de [AD] donc a pour affixe $\dfrac{1}{2}(a + d) = \dfrac{3}{4}$.

donc $z_{\overrightarrow{JK}} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{4}i$ et $z_{\overrightarrow{JM}} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2}i$ donc $z_{\overrightarrow{JK}} = i\,z_{\overrightarrow{JM}}$ donc $(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JK}) = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{JK}}}{z_{\overrightarrow{JM}}}\right)$ donc $(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JK}) = \arg i$

$(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JK}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $|\,z_{\overrightarrow{JK}}\,| = |\,z_{\overrightarrow{JM}}\,|$ donc le quadrilatère JKLM est un parallélogramme qui a un angle droit et deux côtés consécutifs égaux donc est un carré.



EXERCICE 2 5 points Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ se traduit en termes d'affixes par : $m - a = t\,(b - a) \Leftrightarrow m = a + t\,(b - a) = (1 - t)\,a + t\,b$

De même $\overrightarrow{BN} = t\,\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow n = (1 - t)\,b + t\,c$ et $\overrightarrow{CP} = t\,\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow p = (1 - t)\,c + t\,a$

b. G centre de gravité du triangle ABC a pour affixe $g = \dfrac{1}{3}(a + b + c)$

Or $m + n + p = (1 - t)\,a + t\,b + (1 - t)\,b + t\,c + (1 - t)\,c + t\,a = a + b + c$

Le centre de gravité du triangle MNP a pour affixe $\dfrac{1}{3}(m + n + p) = \dfrac{1}{3}(a + b + c) = g$

Les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.

c. Les images respectives de A, B et C par σ sont M, N et P. Comme les similitudes conservent le barycentre, l'image par σ du centre de gravité du triangle ABC est le centre de gravité du triangle MNP donc σ(G) = G.

2. Soit la rotation r de centre G et d'angle $\dfrac{2\,\pi}{3}$.

a. $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (1 - t)\,\overrightarrow{MA} + t\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ or $1 - t + t \neq 0$ donc M est le barycentre du système de points $\{(A\,;\,1 - t)\,;\,(B\,;\,t)\}$.

De même $\overrightarrow{BN} = t\,\overrightarrow{BC}$ donc N est le barycentre du système de points $\{(B\,;\,1 - t)\,;\,(C\,;\,t)\}$.

La rotation r transforme A en B, et B en C.

Une rotation conserve le barycentre, donc : r (M) est barycentre du système $\{(B, 1 - t)\,;\,(C, t)\}$ soit r(M) = N.

b. Soit σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{GM}{GA}$ et d'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM})$.

σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{GM}{GA}$ et d'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM})$ donc GM = $\dfrac{GM}{GA} \times$ GA donc $\sigma_1(A) = M$

ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donc r transforme A en B, B en C, C en A, M en N, N en P et P en M donc G en G

donc GM = GN et GA = GB donc $\dfrac{GM}{GA} = \dfrac{GN}{GB}$ de plus $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM}) = (\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GN})$ donc $\sigma_1(B) = N$.

de même $\sigma_1(C) = P$.

c. Il existe donc une similitude transformant A et B en respectivement M et N.

Comme il n'existe qu'une similitude transformant deux points distincts en deux points distincts, la similitude unique transformant A, B et C en M, N et P est la similitude σ.

EXERCICE 3 5 points   Commun à tous les candidats
Question de cours

La dérivée de $u\,v$ est $u'\,v + v'\,u$ donc $u'\,v = (u\,v)' - v'\,u$ donc $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$

$u\,v$ est une fonction continue dérivable sur $[a\,;\,b]$; une primitive de $(u\,v)'$ est $u\,v$ donc :

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = [\,u(x)\,v(x)\,]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Partie A

1. En posant $\begin{cases} u'(x) = 1 & \text{alors} \quad u(x) = x \\ v(x) = f(x) & \text{alors} \quad v'(x) = f'(x) \end{cases}$ la formule d'intégration par parties donne :

$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [\,x\,f(x)\,]_0^1 - \int_0^1 x\,f'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 x\,f'(x)\,\mathrm{d}x$

2. $f(1)$ est une constante donc $\int_0^1 f(1)\,\mathrm{d}x = f(1)$ donc : $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(1)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x\,f'(x)\,\mathrm{d}x$

soit $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(1)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\,f'(x)\,\mathrm{d}x$ donc : $\int_0^1 [\,f(x) - f(1)]\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\,f'(x)\,\mathrm{d}x$

Partie B

1. $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \left(\dfrac{2+x}{2-x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \left(\dfrac{2+x}{2-x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$

2. *a*. Soit $u(x) = \dfrac{2+x}{2-x}$ alors $u'(x) = \dfrac{(2-x) - (-1)(2+x)}{(2-x)^2} = \dfrac{4}{(2-x)^2}$. $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{4}{(2-x)^2} \times \dfrac{2-x}{2+x}$ donc pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;\,2[$ on a : $f'(x) = \dfrac{4}{4-x^2}$.

b. pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;\,2[$ on a : $-2 < x < 2$ donc $x^2 < 4$ donc $f'(x) > 0$.
f est strictement croissante sur l'intervalle $]-2\,;\,2[$.

Partie C

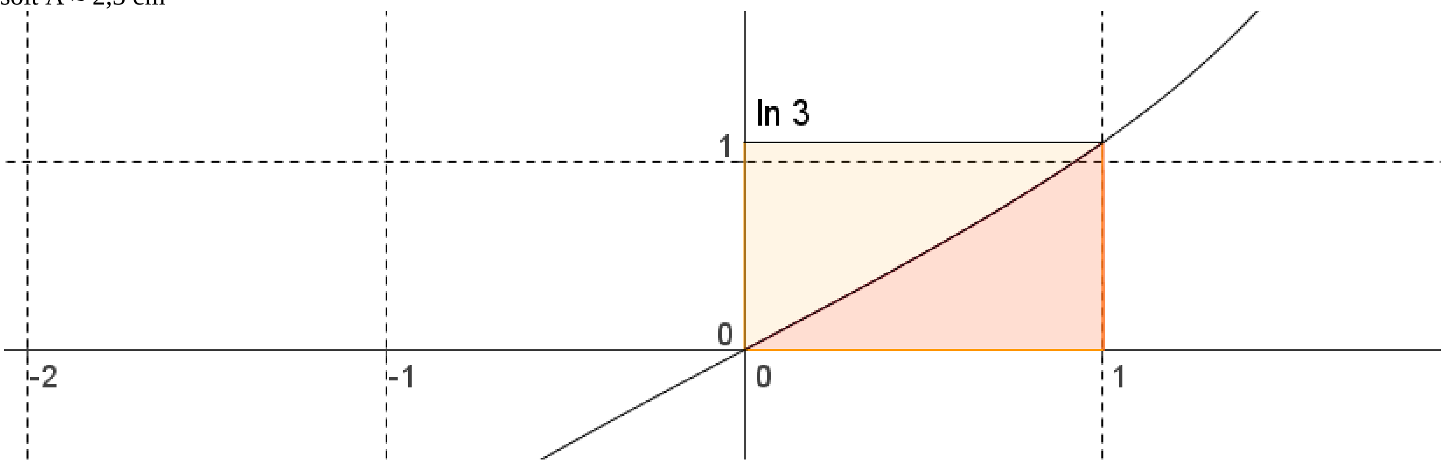
P est le domaine obtenu en retranchant à l'aire du rectangle de longueur 1 et de largeur ln 3, l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ donc A = ln 3 – $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

Donc A = $-\int_0^1 [\,f(x) - f(1)]\,\mathrm{d}x$

$\int_0^1 [\,f(x) - f(1)]\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\,f'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \dfrac{4x}{4-x^2}\,\mathrm{d}x$. La fonction $x \to -\dfrac{4x}{4-x^2}$ est de la forme $2\,\dfrac{u'}{u}$ où $u : x \to 4 - x^2$ donc une primitive de la fonction $x \to -\dfrac{4x}{4-x^2}$ est la fonction $x \to 2\ln(4 - x^2)$

$\int_0^1 [\,f(x) - f(1)]\,\mathrm{d}x = 2\ln(4-1) - 2\ln 4 = 2\ln 3 - 4\ln 2$ donc A = 4 ln 2 – 2 ln 3 unités d'aire.

Le repère est orthonormé d'unité graphique 2 cm donc 1 *u. a.* = 4 cm^2 donc A = 4 (4 ln 2 – 2 ln 3) = 16 ln 2 – 8 ln 3 cm^2
soit A ≈ 2,3 cm^2



EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. Si $v_0 = \ln a$ alors $-v_0 = -\ln a = \ln\left(\dfrac{1}{a}\right)$ donc $u_0 = \dfrac{1}{a} + 1$

2. Si v est strictement croissante, alors : $v_0 < v_n < v_{n+1}$ donc $\dfrac{1}{a} > \mathrm{e}^{-v_n} > \mathrm{e}^{-v_{n+1}} > 0$ donc $1 + \dfrac{1}{a} > \mathrm{e}^{-v_n} + 1 > \mathrm{e}^{-v_{n+1}} + 1 > 1$ soit $u_n > u_{n+1} > 1$ donc u est strictement décroissante et minorée par 1.

3. Si v diverge vers $+\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} -v_n = -\infty$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-v_n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$, u converge vers 1.

4. Si v est majorée par 2, alors : pour tout n de N, $v_n < 2$ donc $-v_n > -2$ donc $\mathrm{e}^{-v_n} > \mathrm{e}^{-2}$ soit $u_n > \mathrm{e}^{-2} + 1$,
u est minorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$.

Partie B

$\ln(u_n) + v_n = \ln[\mathrm{e}^{-v_n} + 1] + v_n = \ln[\mathrm{e}^{-v_n}(\mathrm{e}^{v_n} + 1)] + v_n$ donc $\ln(u_n) + v_n = \ln(\mathrm{e}^{-v_n}) + \ln(\mathrm{e}^{v_n} + 1)] + v_n$

$\ln(u_n) + v_n = \ln(\mathrm{e}^{v_n} + 1)$ or pour tout x réel, $\mathrm{e}^x > 0$ donc pour tout entier naturel non nul, $\mathrm{e}^{v_n} + 1 > 1$ donc pour tout entier naturel non nul, $\ln(u_n) + v_n > 0$.