Amérique du Nord juin 2007

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) unité graphique : 1 cm.

On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3 + 5$ i, $b = -4 + 2$ i et $c = 1 + 4$ i.
Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2\text{ i})\, z + 1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

2. *a*. Déterminer l'affixe du point B′ image du point B par f .

b. Montrer que les droites (CB′) et (CA) sont orthogonales.

3. Soit M le point d'affixe $z = x + \text{i}\, y$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
Soit M′ l'image de M par f .
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{CM'}}$ et $\overrightarrow{\text{CA}}$ sont orthogonaux si et seulement si $x + 3\, y = 2$.

4. On considère l'équation (E) : $x + 3\, y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

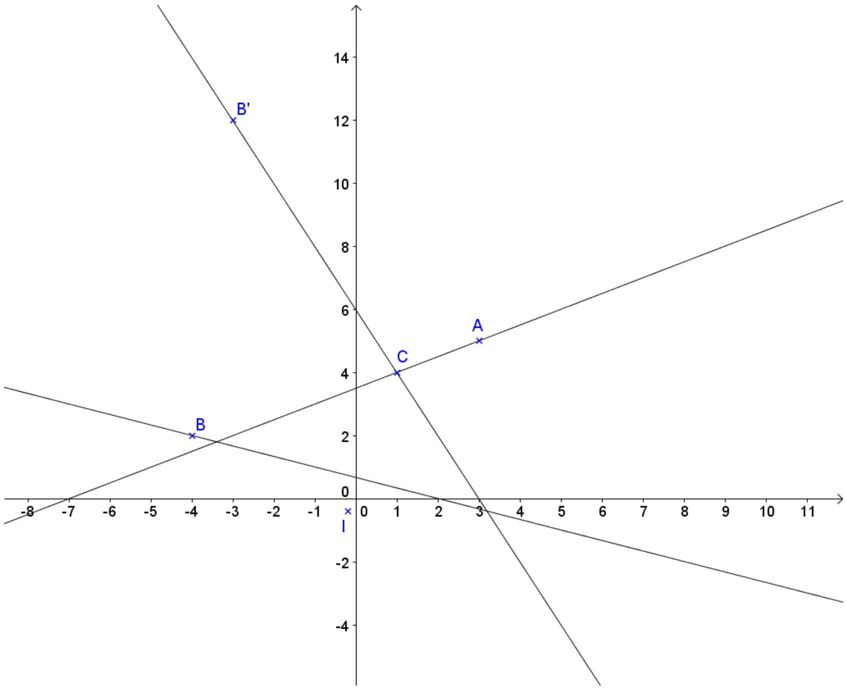
a. Vérifier que le couple (− 4 ; 2) est une solution de (E).

b. Résoudre l'équation (E).

c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle [− 5 ; 5] et tels que les vecteurs $\overrightarrow{\text{CM'}}$ et $\overrightarrow{\text{CA}}$ soient orthogonaux.
Placer ces points sur la figure.

CORRECTION

1. L'expression complexe de f est de la forme $a\, z + b$ donc f est une similitude directe :
- de rapport $|\, 2 - 2\text{ i}\,| = 2\sqrt{2}$,
- d'angle $\arg(2 - 2\text{ i}) = -\dfrac{\pi}{4} + 2\, k\, \pi$
- de centre le point invariant par f : $z = (2 - 2\text{ i})\, z + 1$ soit $z = \dfrac{1}{-1+2\text{ i}} = \dfrac{-1-2\text{ i}}{5}$



2. *a*. L'affixe du point B′ image du point B par f vérifie $z' = (2 - 2\text{ i})\, z + 1$ et B $(-4 + 2\text{ i})$ donc $z' = (2 - 2\text{ i})(-4 + 2\text{ i}) + 1 = -3 + 12\text{ i}$

b. $\overrightarrow{\text{CB'}}$ a pour coordonnées (– 4 ; 8) et $\overrightarrow{\text{CA}}$ (2 ; 1) donc $\overrightarrow{\text{CB'}} \cdot \overrightarrow{\text{CA}} = -4 \times 2 + 8 \times 1 = 0$
$\overrightarrow{\text{CB'}}$ et $\overrightarrow{\text{CA}}$ sont orthogonaux donc les droites (CB′) et (CA) sont orthogonales.

3. Soit M d'affixe $z = x + \text{i}\, y$.
M' = f (M) a pour affixe z' avec $z' = (2 - 2\text{ i})\, z + 1 = (2 - 2\text{ i})(x + \text{i}\, y) + 1 = 2\, x - 1 - 2\, y + 1 + \text{i}\,(2\, y - 2\, x)$.
$\overrightarrow{\text{CM'}}$ a pour affixe $z' - z_{\text{C}} = 2\, x + 2\, y + (2\, x - 2\, y - 4)$ i, donc $\overrightarrow{\text{CM'}}$ a pour coordonnées $(2\, x + 2\, y\, ;\, 2\, x - 2\, y - 4)$
$\overrightarrow{\text{CA}}$ a pour affixe $z_{\text{A}} - z_{\text{C}} = 2 + \text{i}$, donc $\overrightarrow{\text{CA}}$ a pour coordonnées (2 ; 1)

$\overrightarrow{\text{CM'}}$ et $\overrightarrow{\text{CA}}$ orthogonaux $\Leftrightarrow$ leur produit scalaire est nul $\Leftrightarrow 2\,(2\, x + 2\, y) + 1 \times 2\, x - 2\, y - 4) = 0 \Leftrightarrow x + 3\, y = 2$.

4. On considère l'équation (E) : $x + 3\, y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. $-4+3\times 2=2$ donc le couple $(-4\,;\,2)$ est une solution de (E).

b. $x+3y=2$ donc en posant $y=k$ ($k\in\mathbb{Z}$) alors $x=2-3k$

L'ensemble des solutions de (E) est $S=\{(2-3k\,;\,k)\,,\,k\in\mathbb{Z}\}$

c. On cherche les couples solutions de (E) vérifiant $-5\le x\le 5$ et $-5\le y\le 5$. soit $-5\le 2-3k\le 5$ et $-5\le k\le 5$ soit $-1\le k\le \dfrac{7}{3}$ et $-5\le k\le 5$. les valeurs possibles pour k sont -1 ; 0, 1 ou 2.

Les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5\,;\,5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux sont les points de coordonnées $(-4\,;\,2)$, $(-1\,;\,1)$, $(2\,;\,0)$ et $(5\,;\,-1)$.
On retrouve le point B qu'on avait trouvé à la question 2. *a*. ce qui est logique puisque les droites (CB′) et (CA) sont orthogonales.