Second degré, cours pour la classe de première S

1 Polynômes du second degré

Définition :

On appelle *fonction polynôme du second degré* (ou fonction *trinôme du second degré*), toute fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels fixés et $a \neq 0$.

Exemples :

$$P(x) = x^2$$
$$Q(x) = x^2 - 2x + 3$$
$$R(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$$

Propriété et définition :

Pour toute fonction *polynôme du second degré* f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, \quad b, \quad c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, on a :

$$f(x) = a((x-\alpha)^2 + \beta)$$

où

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

et

$$\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

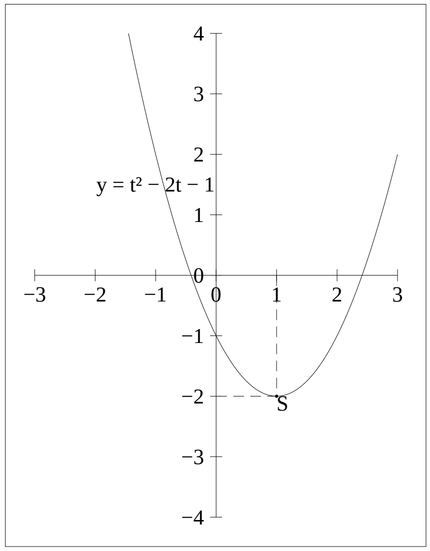
Cette écriture est appelée *forme canonique* de la fonction f.

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\
&= a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) \\
&= a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}
\end{aligned}$$

Remarque :
Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan, la forme canonique montre que la représentation graphique de la fonction trinôme du second degré f est une parabole dont le point S de coordonnées $(\alpha; \beta)$ est le sommet.



2 Equations du second degré

Définition :

- Toute solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée *racine* du trinôme f défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout x réel.
- On appelle *discriminant* du trinôme le réel Δ défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple :
2 est une racine de $2x^2 - 5x + 2$.
Le discriminant du trinôme $2x^2 - 5x + 2$ est
$\delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16 = 9$.

Remarque :
Ordonner les termes du trinôme avant de calculer le discriminant.

Propriété :

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution réelle dite racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Preuve :
On a vu auparavant que $f(x) = a((x-\alpha)^2 + \beta)$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.
On a $f(x) = 0$ qui s'écrit encore puisque $a \neq 0$, $(x-\alpha)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$
Donc $(x-\alpha)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$.
On reconnaît le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
- si $\Delta < 0$, comme le premier membre $(x-\alpha)^2$ est nécessairement positif, l'équation n'a pas de solution ;
- si $\Delta = 0$, l'équation s'écrit $(x-\alpha)^2 = 0$ donc $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$ est l'unique solution ;
- si $\Delta > 0$, l'équation donne $x - \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ ou $x - \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ donc $x = \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}$ ou $x = \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}$ d'où les deux solutions x_1 et x_2 en simplifiant.

Propriété :

Avec les mêmes notations que précédemment, on a pour $f(x) = ax^2 + bx + c$:
- si $\Delta < 0$, $f(x)$ n'admet pas de factorisation dans $\mathbb{R}$;
- si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x-x_0)^2$ où x_0 est la racine double du trinôme ;
- si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les deux racines distinctes du trinôme.

Preuve :
Contenue dans la preuve précédente.

3 Inéquations du second degré

Propriété :

Avec les mêmes notations que précédemment,
- si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas ;
- si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ et s'annule en x_0 uniquement ;
- si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines x_1 et x_2 et du signe opposé à l'intérieur.

Exemple :
Résolution de $\frac{-x^2+6+7}{x+2} \geq 0$.
$x+2=0$ équivaut à $x=-2$ donc -2 est la seule valeur interdite.
Résolution de $-x^2+6x+7=0$. On a $\Delta = 36-4\times(-1)\times 7 = 64$. $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-6+8}{-2} = -1$ et $x_2 = \frac{-6-8}{-2} = 7$.
Étude de signe :

x	$-\infty$		-2		-1		7		$+\infty$
$x+2$		-	0	+		+		+	
$-x^2+6x+7$		-		-	0	+	0	-	
$\frac{-x^2+6x+7}{x+2}$		+	$\Vert$	-	0	+	0	-	

Donc $S =]-\infty;-2[\cup[-1;7]$