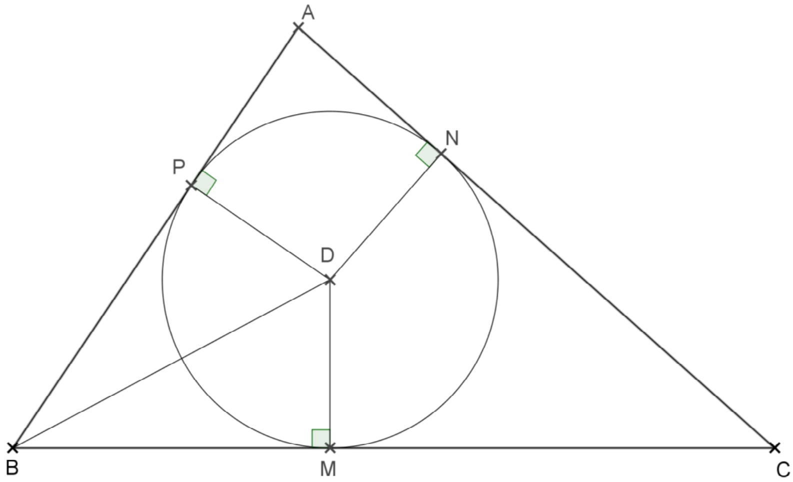
ABC est un triangle tel que AB = 4 cm, BC = 6 cm et AC = 5 cm.
Son cercle inscrit est tangent au côté [AB] en P, au côté [BC] en M et au côté [AC] en N.
On pose $x$ = AP, $y$ = BM et $z$ = CN.

1. Faire la figure à la main, soit à l'aide de Géogebra.
2. Justifier que le problème revient à résoudre l'équation matricielle A X = B où A $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
3. Calculer l'inverse, si elle existe de la matrice A.
4. En déduire les dimensions recherchées.

**CORRECTION**

1.




2. D est le centre du cercle inscrit donc DP = DM = DN, et P, M et N sont respectivement les projections orthogonales de D sur les côtés [AB], [BC] et [AC] du triangle ABC.

Les triangles BDM et BDP sont rectangles donc $BM^2 + MD^2 = BD^2$ et $BP^2 + PD^2 = BD^2$ or MD = PD donc BM = BP.
De même AP = AN et CM = CN
M $\in$ [BC] donc BC = BM + MC donc BC = BM + CN soit $y + z = 6$
N $\in$ [AC] donc AC = AN + NC donc AC = AP + CN soit $x + z = 5$
P $\in$ [AB] donc AB = AP + PB donc AB = AP + BM soit $x + y = 4$

$x$, $y$, $z$ sont donc solutions du système : $\begin{cases} x + y = 4 \\ x + z = 5 \\ y + z = 6 \end{cases}$ donc le problème revient à résoudre l'équation matricielle A X = B où A $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

**3.** A l'aide de la calculette, l'inverse de A est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

4. A X = B $\Leftrightarrow$ $A^{-1}$ A X = $A^{-1}$ B $\Leftrightarrow$ X = $A^{-1}$ B

$$X = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$X = \begin{pmatrix} 2 + 2,5 - 3 \\ 2 - 2,5 + 3 \\ -2 + 2,5 + 3 \end{pmatrix}$ soit $X = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$ donc AP = 1,5, BM = 2,5 et CN = 3,5.