I. Résoudre dans N, le système S : $\begin{cases} a\,b = 12\,600 \\ ppcm\,(a\,;b) = 1260 \end{cases}$

II. Soit $n \in$ N

1. Pour : $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 5^n par 13.

2. *a*. Montrer par récurrence sur n, que $5^{4n} - 1$ est divisible par 13

b. En déduire que : $5^{4n+1} - 5$, $5^{4n+2} - 12$; et $5^{4n+3} - 8$ est divisible par 13.

c. Déterminer alors le reste de la division par 13 du nombre 5^{2011}

3. Le nombre p étant un entier naturel on considère le nombre A, défini par $A(p) = 5^{2p} + 5^{4p}$.

a. Si $p = 2n$, quel est le reste de la division de A, par 13 ?

b. Démontrer que, si $p = 2n + 1$, A est divisible par 13.

4. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$, définie par : $u_n = 1 + 5 + 5^2 + .. + 5^{n-1}$

a. Montrer que $u_n = \dfrac{5^n - 1}{4}$.

b. Montrer que si u_n est divisible par 13 alors $5^n - 1$ est divisible par 13.

c. Réciproquement, montrer que si $5^n - 1$ est divisible par 13, alors u_n est divisible par 13

Indication : $13\,u_n - 3 \times (4\,u_n) = u_n$.

d. En déduire les valeurs de n telles que u_n, soit divisible par 13.

CORRECTION

I. Soit d = pgcd (a ; b) alors il existe a' et b' deux entiers tels que $a = d\,a'$, $b = d\,b'$ et pgcd (a' ; b') = 1

$a\,b$ = pgcd (a ; b) × ppcm (a ; b) donc $12\,600 = d \times 1260$ soit $d = 10$

$a = 10\,a'$, $b = 10\,b'$ donc $a'\,b' = 126$

$126 = 2 \times 3^2 \times 7$ donc on a les possibilités suivantes (en colonne) en éliminant les nombres qui ne sont pas premiers entre eux :

a'	1	2	~~3~~	~~6~~	7	9	14	18	~~21~~	~~42~~	63	126
b'	126	63	~~42~~	~~21~~	18	14	9	7	~~6~~	~~3~~	2	1
$a = 10\,a'$	10	20			70	90	140	180			630	1260
$b = 10\,b'$	1260	630			180	140	90	70			20	10

II — Soit $n \in$ N

1. Pour : $1 \leq n \leq 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 5^n par 13.

$5 = 0 \times 13 + 5$ | $5^2 = 25 = 1 \times 13 + 12$ | $5^3 = 10 \times 13 - 5 = 9 \times 13 + 8$

$5^4 = (5^2)^2 = 13\,(13 + 2 \times 12) + 1$ | $5^5 = 5^4 \times 5$ donc $5^5 = 13 \times 240 + 5$ | $5^6 = 5^4 \times 5^2$ donc $5^6 = 13 \times 1201 + 12$

Il aurait été beaucoup plus simple de raisonner avec des congruences.

n	1	2	3	4	5	6
reste de la division de 5^n par 13	5	12	8	1	5	12

2. *a*. **Initialisation :** Si $n = 0$, $5^{4n} - 1 = 0$ donc $5^{4n} - 1$ est divisible par 13

Hérédité : montrons pour tout entier n que si $5^{4n} - 1$ est divisible par 13 alors $5^{4(n+1)} - 1$ est divisible par 13

$5^{4(n+1)} - 1 = 5^{4n} \times 5^4 - 1 = (5^{4n} - 1) \times 5^4 + 5^4 - 1$

$5^4 - 1$ et $5^{4n} - 1$ sont divisibles par 13 donc $5^{4(n+1)} - 1$ est divisible par 13.

La propriété est héréditaire

Conclusion : la propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier n, $5^{4n} - 1$ est divisible par 13

b. 13 divise $5^{4n} - 1$ donc 13 divise $5 \times (5^{4n} - 1) = 5^{4n+1} - 5$,

$5^{4n+2} - 12 = 5^2 \times (5^{4n} - 1) + 5^2 - 12$, or le reste de la division de 5^2 par 13 est 12 donc 13 divise $5^2 - 12$

13 divise $5^2 \times (5^{4n} - 1)$ et 13 divise $5^2 - 12$ donc 13 divise $5^2 \times (5^{4n} - 1) + 5^2 - 12$, soit 13 divise $5^{4n+2} - 12$

$5^{4n+3} - 8 = 5^{4n+3} - 5^3 + 5^3 - 8 = 5^3 \times (5^{4n} - 1) + 5^3 - 8$, or le reste de la division de 5^3 par 13 est 8 donc 13 divise $5^3 - 8$

13 divise $5^3 \times (5^{4n} - 1)$ et 13 divise $5^3 - 8$ donc 13 divise $5^3 \times (5^{4n} - 1) + 5^3 - 8$, soit 13 divise $5^{4n+3} - 8$

c. $2011 = 4 \times 502 + 1$ donc 2011 est de la forme $4n + 1$ donc 13 divise $5^{2011} - 5$ donc le reste de la division par 13 du nombre 5^{2011} est 5.

3. Le nombre p étant un entier naturel on considère le nombre A, défini par $A(p) = 5^{2p} + 5^{4p}$.

a. Si $p = 2n$ alors $A(p) = 5^{4n} + 5^{8n} = 5^{4n} - 1 + 5^{4 \times 2n} - 1 + 2$,

13 divise $5^{4n} - 1$ et $5^{4 \times 2n} - 1$ donc $A(p)$ est de la forme $13\,q + 2$ ($q \in$ N) donc le reste de la division de $A(p)$ par 13 est 2.

b. $A(p) = 5^{4n+2} + 5^{4 \times (2n+1)} = 5^{4n+2} - 12 + 5^{4 \times (2n+1)} - 1 + 13$

13 divise $5^{4n+2} - 12$ et $5^{4 \times (2n+1)} - 1$ donc $A(p)$ est de la forme $13\,q$ ($q \in$ N) donc si $p = 2n + 1$, $A(p)$ est divisible par 13

4. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$, définie par : $u_n = 1 + 5 + 5^2 + .. + 5^{n-1}$

a. Si $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \dots q^{n-1} = \dfrac{a^n - 1}{q - 1}$ donc en choisissant $q = 5$: $u_n = \dfrac{5^n - 1}{4}$.

b. Si u_n est divisible par 13 alors il existe un entier k tel que $\dfrac{5^n - 1}{4} = 13\,k$ soit $5^n - 1 = 13 \times 4\,k$ donc $5^n - 1$ est divisible par 13.

c. si $5^n - 1$ est divisible par 13, alors, il existe un entier k tel que $5^n - 1 = 13\,k$

$\dfrac{5^n - 1}{4}$ est un entier et 13 et 4 sont premiers entre eux donc 4 divise k, il existe un entier k' tel que $k = 4\,k'$ alors $u_n = 13\,k'$ donc u_n est divisible par 13

d. D'après les questions précédentes, u_n est divisible par 13 si et seulement si $5^n - 1$ est divisible par 13
Soit n un entier naturel, en divisant n par 4, on 4 cas possibles : $n = 4\,p$; $n = 4\,p + 1$; $n = 4\,p + 2$; $n = 4\,p + 3$
D'après les questions précédentes :
le reste de la division par 13 de 5^{4p} est 1 donc 13 divise $5^{4p} - 1$
le reste de la division par 13 de 5^{4p+1} est 5 donc 13 ne divise pas $5^{4p+1} - 1$
le reste de la division par 13 de 5^{4p+2} est 12 donc 13 ne divise pas $5^{4p+2} - 1$
le reste de la division par 13 de 5^{4p+3} est 8 donc 13 ne divise pas $5^{4p+3} - 1$.
$5^n - 1$ est divisible par 13 $\Leftrightarrow$ n = 4 p $\Leftrightarrow$ u_n est divisible par 13