Table des matières

2012

Amérique du sud novembre 2012
Partie A
1. Restitution organisée de connaissances

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

On suppose connus les résultats suivants :

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée.
- $e^0 = 1$.
- Pour tout réel x, on a $e^x > x$.
- Soit deux fonctions v et w définies sur l'intervalle $[A ; +\infty[$, où A est un réel positif.

Si pour tout x de $[A ; +\infty[$: $v(x) \leq w(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x) = +\infty$.

a. Soit φ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $\varphi(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $\varphi(x) \geq 1$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2} x e^{-\frac{1}{2}x}$.

a. Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
b. Etudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations sur $[0 ; +\infty[$.

Partie B
On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t exprimé en heures ($t \geq 0$).

On constate expérimentalement que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \dfrac{1}{2} y = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + \dfrac{1}{2} y = 0$.

a. Déterminer le réel a pour que la fonction u définie par l'équation $u(t) = a\,t\,e^{-\frac{1}{2}t}$ soit solution de l'équation (E).
b. Montrer qu'une fonction v est solution de l'équation (E) si et seulement si, la fonction $h = v - u$ est solution de l'équation (E').
c. Résoudre l'équation (E').
d. En déduire les solutions de l'équation (E).
3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Affecter la valeur 3 à la variable n
Traitement	Tant que $f(n) > 0{,}1$
	Incrémenter la variable n de 1
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la valeur de n

où f est la fonction étudiée dans la partie A.
a. A l'aide de la question 2. *a.* de la partie A, expliquer pourquoi il est certain que cet algorithme donne une valeur en sortie.
b. Quelle est la valeur n_0 de la variable n obtenue à la sortie de l'algorithme ?

Nouvelle Calédonie novembre 2012

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$ par : $f(x) = 5\ln(x \pm 3) - x$.

1. *a.* On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[\, 0; +\infty\, [$.

b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$.

c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a :

$$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

d. En déduire la limite de f en $+\infty$.

e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$.

2. *a.* Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$. On notera α cette solution.

b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[\, 14 \,;\, 15\,]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{pour tout entier naturel } n \neq 0,\ u_{n+1} = 5\ln(u_n + 3) \end{cases}$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$ par :

$$g(x) = 5\ln(x + 3).$$

En **Annexe 1** on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathbf{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathbf{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1. *a.* Construire sur l'axe des abscisses de **l'Annexe I** les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n).

2. *a.* Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$.

b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2.*a*.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leq u_n \leq \alpha$$

d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1.*b* de la partie 3.

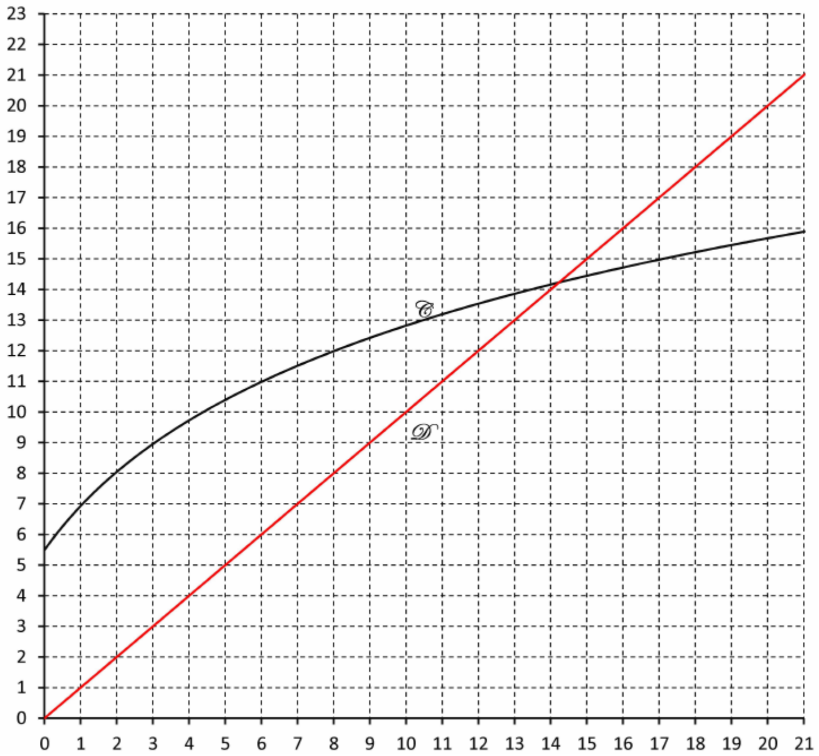
e. En utilisant la question 2.*a* de la partie A, justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
u prend la valeur 4
Répéter Tant que u – 14,2 < 0
u prend la valeur de 5 ln ( u + 3 )
Fin du Tant que
Afficher u
```

a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.* Justifier que cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).



$\mathscr{C}$
$\mathscr{D}$
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23

Pondichéry avril 2012
Les deux parties sont indépendantes.
Partie A
Un groupe de 50 coureurs ; portant des dossards numérotés de 1 à 50 ; participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes ; et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape ; un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel

- *a* rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1 ; 50]
- l'écriture *a* $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	a: = 0 ; b: = 0 ; c: = 0 ; d: = 0 ; e: = 0
Traitement	Tant que ($a = b$) ou ($a = c$) ou ($a = d$) ou ($a = e$) ou ($b = c$) ou ($b = d$) ou ($b = e$) ou ($c = d$) ou ($c = e$) ou ($d = e$) Début du tant que a := rand(1, 50) ; b := rand(1, 50) ; c := rand(1, 50) ; d := rand(1, 50) ; e:= rand(1, 50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme

$L_1 = \{2, 11, 44, 2, 15\}$; $L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
$L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}$; $L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?

b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.

4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des événements suivants

- il a été contrôlé 5 fois exactement ;
- il n'a pas été contrôlé ;
- il a été contrôlé au moins une fois.

Partie B
Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.
Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'événement « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que P(T) = 0,05.
On appelle D l'événement : « le coureur est dopé ».
Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

1. Calculer P(D).
2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?