Un écran d'ordinateur est constitué d'un quadrillage, réseau à base carrée ; les carrés appelés "pixels" s'allument individuellement ; ici il y a 640×480 pixels. Les pixels ont pour coordonnées (x ; y) en repère orthonormal où $0 \le x \le 640$ et $0 \le y \le 480$

1. On veut tracer sur l'écran le segment d'origine M (0 ; 319) et d'extrémité P (341 ; 0).
Déterminer une équation (E) de la droite(MP) de la forme $a\,x + b\,y = c$ où a, b et c sont des entiers naturels.
2. Calculer PGCD(319 ; 341). Simplifier le plus possible les coefficients de (E)
3. Résoudre l'équation $319\,x + 341\,y = 108\,779$, où ($x$; y) est un couple d'entiers relatifs.
4. Combien de points à coordonnées entières, M et P mis à part, s'allumeront-ils sur le segment [MP] ?
Montrer que ces points découpent [MP] en des segments de longueur égales
5. Etude du cas général
Soient a, b et c trois entiers strictement positifs, avec PGCD(a ; b) = 1.
Montrer que l'équation a $x + b\,y = c$ admet des solutions entières ; donner l'expression générale de ces solutions .
En déduire que sur la droite $a\,x + b\,y = c$, tout segment de longueur supérieure à $\sqrt{a^2 + b^2}$ contient au moins un point à coordonnées entières .

CORRECTION

1. La droite (MP) a une équation de la forme $a\,x + b\,y = c$.
Le point M (0 ; 319) appartient à cette droite donc $319\,b = c$
Le point P (341 ; 0)appartient à cette droite donc $341\,a = c$,
Une équation de droite est connue à un coefficient multiplicatif près donc choisissons $c = 319 \times 341 = 108\,779$
alors $319\,b = 319 \times 341$ donc $b = 341$ et $341\,a = 319 \times 341$ donc $a = 319$
Une équation de la droite (MP) est $319\,x + 341\,y = 108\,779$.

2. $341 = 319 \times 1 + 22$ et $319 = 22 \times 14 + 11$ et $22 = 2 \times 11$ donc le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide est 11 donc PGCD (319 ; 341) = 11
$319 = 11 \times 29$ et $341 = 11 \times 31$ avec 31 et 29 premiers entre eux donc en divisant par 11 les coefficients, une équation de la droite (MP) est $29\,x + 31\,y = 9\,889$

3. $9\,889 = 11 \times 29 \times 31$ donc une solution de $29\,x + 31\,y = 9\,889$ est le couple (11×31 ; 0)
$\begin{cases} 29\,x + 31\,y = 9\,889 \\ 29 \times 341 + 31 \times 0 = 9\,889 \end{cases}$ donc par différence membre à membre : $29\,(x - 341) + 31\,y = 0$
soit $29\,(x - 341) = -\,31\,y$ donc 29 divise $31\,y$, or 29 et 31 sont premiers entre eux donc 29 divise y, il existe un entier relatif k tel que $y = 29\,k$ alors en remplaçant dans $29\,(x - 341) = -\,31\,y$ on obtient après simplification : $x - 341 = -\,31\,k$ soit $x = -\,31\,k + 341$
Vérification : si $x = -\,31\,k + 341$ et $y = 29\,k$ alors $29\,x + 31\,y = 29 \times (-\,31\,k + 341) + 31 \times 29\,k = 29 \times 341 = 9\,889$
donc la relation est vérifiée, les solutions de $29\,x + 31\,y = 9\,889$ sont les couples ($-\,31\,k + 341$; $29\,k$) avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. Les points du segments [MP] doivent appartenir à la droite d'équation $29\,x + 31\,y = 9\,889$ et vérifier $0 \le x \le 341$ et $0 \le y \le 319$
leurs coordonnées sont donc de la forme ($-\,31\,k + 341$; $29\,k$) avec $k \in \mathbb{Z}$ avec $0 \le -\,31\,k + 341 \le 341$ et $0 \le 29\,k \le 319$
donc $0 \le k \le \frac{341}{31}$ et $0 \le k \le \frac{319}{29}$ soit $0 \le k \le 11$
$k = 0$ redonne le point M, $k = 11$ le point P on a donc 10 points autres que M et P qui s'allumeront sur le segment [MP].

Soit M_k le point de coordonnées ($-\,31\,k + 341$; $29\,k$) avec $1 \le k \le 10$ et $k \in \mathbb{Z}$.
en convenant que $M_0 = M$ et $M_{11} = P$, $\overrightarrow{M_kM_{k+1}}$ est le vecteur de coordonnées ($-\,31\,(k + 1) - 31\,k$; $29\,(k + 1) - 29\,k$) soit ($-\,31$; 29) avec $0 \le k \le 10$
$\overrightarrow{M_kM_{k+1}}$ est le vecteur de coordonnées ($-\,31$; 29) donc la longueur $M_k\,M_{k+1}$ est constante, ces points découpent [MP] en des segments de longueur égales

5. Etude du cas général
a, b et c sont trois entiers strictement positifs, avec PGCD(a ; b) = 1 donc d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $a\,u + b\,v = 1$ donc $a\,(u\,c) + b\,(v\,c) = c$ donc l'équation a $x + b\,y = c$ admet des solutions entières.

En notant (x_0 ; y_0) le couple solution trouvé
$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a\,x_0 + b\,y_0 = c \end{cases}$ donc par différence membre à membre : $a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0$
soit $a\,(x - x_0) = -\,b\,(y - y_0)$ donc a divise $-\,b\,(y - y_0)$, or a et b sont premiers entre eux donc a divise $y - y_0$, il existe un entier relatif k tel que $y - y_0 = a\,k$ alors en remplaçant dans $a\,(x - x_0) = -\,b\,(y - y_0)$ on obtient après simplification : $x - x_0 = -\,b\,k$ soit $x = -\,b\,k + x_0$
Vérification : si $x = -\,b\,k + x_0$ et $y = a\,k + y_0$ alors $a\,x + b\,y = a \times (-\,b\,k + x_0) + b \times (a\,k + y_0) = a\,x_0 + b\,y_0 = c$
donc la relation est vérifiée, les solutions de $a\,x + b\,y = c$ sont les couples ($-\,b\,k + x_0$; $a\,k + y_0$) avec $k \in \mathbb{Z}$.

Soit M un point à coordonnées entières de la droite d'équation $a\,x + b\,y = c$.
Ce point à des coordonnées de la forme ($-\,b\,k + x_0$; $a\,k + y_0$) avec $k \in \mathbb{Z}$.

Soit M_k le point de coordonnées ($-\,b\,k + x_0$; $a\,k + y_0$)

$\overrightarrow{M_k M_{k+1}}$ est le vecteur de coordonnées $(-b\,(k+1) - b\,k\,;\, a\,(k+1) - a\,k)$ soit $(-b\,;\,a)$

donc la longueur $M_k M_{k+1}$ est constante et est égale à $\sqrt{a^2 + b^2}$

donc sur la droite $a\,x + b\,y = c$, tout segment de longueur supérieure à $\sqrt{a^2 + b^2}$ contient au moins un point à coordonnées entières .