On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; – 1 ; – 2) et D (7 ; – 1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ (2 ; – 1 ; 3).
a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit P_1 le plan d'équation $x + y + z = 0$ et P_2 le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.
a. Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.
b. Vérifier que la droite *d*, intersection des plans P_1 et P_2, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
c. La droite *d* et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

CORRECTION

1. $\overrightarrow{AB}(1 ; -1 ; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(2 ; -5 ; -3)$. Les coordonnées des vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. *a.* $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + (-1) \times (-1) + 3 \times (-1) = 2 + 1 - 3 = 0$
$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + (-1) \times (-5) + 3 \times (-3) = 4 + 5 - 9 = 0$
La droite Δ est orthogonale aux droites (AB) et (AC) qui sont sécantes donc la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

b. la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC), donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC)
Une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme $2x - y + 3z + d = 0$
A(0 ; 4 ; 1) est un point du plan donc $2 \times 0 - 1 \times 4 + 3 \times 1 + d = 0$
$-4 + 3 + d = 0$ soit $d = 1$
Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 3z + 1 = 0$

c. $M \in \Delta \Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{DM} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 = 2k \\ y + 1 = -k \\ z - 4 = 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 + 2k \\ y = -1 - k \\ z = 4 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

d. $H \in \Delta$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que les coordonnées de H soient $(7 + 2k ; -1 - k ; 4 + 3k)$
H appartient au plan (ABC) donc $2x_H - y_H + 3z_H + 1 = 0$
soit $2(7 + 2k) - (-1 - k) + 3(4 + 3k) + 1 = 0$
$14 + 4k + 1 + k + 12 + 9k + 1 = 0$
$14k + 28 = 0$ donc $k = -2$
Les coordonnées de H soient $(7 + 2k ; -1 - k ; 4 + 3k)$ avec $k = -2$ donc H a pour coordonnées (3 ; 1 ; – 2).

3. Soit P_1 le plan d'équation $x + y + z = 0$ et P_2 le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.

a. Le vecteur $\overrightarrow{n_1}(1 ; 1 ; 1)$ est un vecteur normal à P_1.
Le vecteur $\overrightarrow{n_2}(1 ; 4 ; 0)$ est un vecteur normal à P_2.
Les coordonnées des vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles, donc les plans P_1 et P_2 sont sécants.

b. Soit M un point de *d*, donc $M \in P_1 \cap P_2$ donc les coordonnées de M vérifient : $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$

En posant $y = t$, $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + t + z = 0 \\ x + 4t + 2 = 0 \end{cases}$ et $y = t$
donc $x = -4t - 2$ et $z = -t - x = 3t + 2$

La droite *d*, intersection des plans P_1 et P_2, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

c. Un vecteur directeur de *d* est $\vec{v}(-4 ; 1 ; 3)$
Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + 3z + 1 = 0$ donc un vecteur normal au plan est $\vec{n}(2 ; -1 ; 3)$
$\vec{v}\cdot\vec{n} = -4 \times 2 + 1 \times (-1) + 3 \times 3 = -8 - 1 + 9 = 0$ donc la droite *d* et le plan (ABC) sont parallèles.