A cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraine à faire des services.

Pour tout entier naturel non nul, on note $R_n$ l'événement « le joueur réussit son $n^{\text{-ième}}$ service » et $\overline{R_n}$ l'événement contraire.

Soit $x_n$ la probabilité $R_n$ est $y_n$ celle de $\overline{R_n}$.

La probabilité qu'il réussisse son premier service est égale à 0,7.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le joueur réussit le *n*-ième service, la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,8 ;
- si le joueur ne réussit pas le *n*-ième service, la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,7.

**1.** On s'intéresse aux deux premiers services de l'entrainement.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre services réussis sur ces deux premiers services.

***a.*** Déterminer la loi de probabilité de X. (On pourra utiliser un arbre de probabilité).

***b.*** Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.

**2.** On s'intéresse maintenant au cas général.

***a.*** Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

***b.*** Montrer que pour tout entier naturel non nul *n*, on a :

$$x_{n+1} = 0{,}1\, x_n + 0{,}7.$$

**3.** Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel *n* non nul par ;

$$u_n = 9\, x_n - 7$$

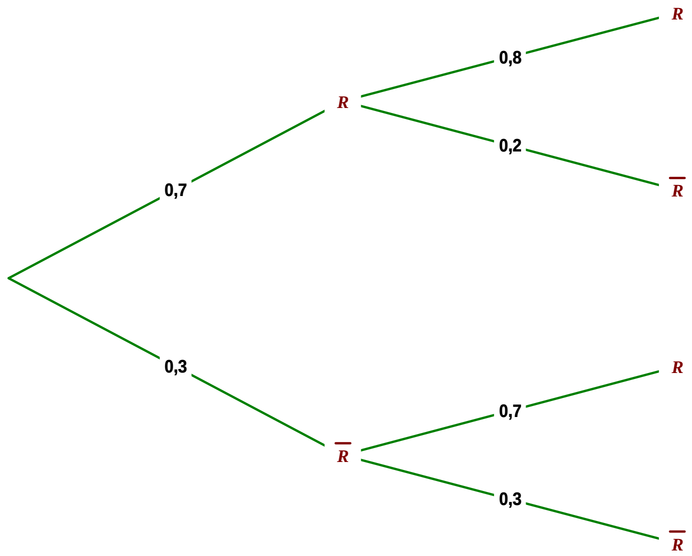
Dans ces deux questions, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

***a.*** Déterminer la nature de la suite $(u_n)$.

***b.*** En déduire la limite de la suite $(x_n)$.

## CORRECTION

**1. *a.***




La probabilité que le joueur réussisse 2 services est

$$p(R_1 \cap R_2) = 0{,}7 \times 0{,}8$$

La probabilité que le joueur réussisse 0 service est

$$p(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = 0{,}3 \times 0{,}3$$

donc $p(X = 2) = 0{,}56$ et $p(X = 0) = 0{,}09$

La probabilité que le joueur réussisse un seul service est égale à

$p(R_1 \cap \overline{R_2}\,_2) + p(\overline{R_1} \cap R_2)$

soit $0{,}7 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}14 + 0{,}21 = 0{,}35$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | Total |
|---|---|---|---|---|
| $p(X = x)$ | 0,09 | 0,35 | 0,56 | 1 |
| $x\, p(X = x)$ | 0 | 0,35 | 1,12 | 1,47 |

***b.*** $E(X) = 0 \times p(X = 0) + 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2) = ,147$

**2. *a.*** Si le joueur réussit le *n*-ième service, la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,8 ; donc $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0{,}8$

Si le joueur ne réussit pas le *n*-ième service, la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,7 ; donc $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 0{,}7$

***b.*** $x_{n+1} = P_{R_n}(R_{n+1}) \times P(R_n) + P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \times P(\overline{R_n})$

$x_{n+1} = 0{,}8\, x_n + 0{,}7 \times (1 - x_n)$

$x_{n+1} = 0{,}8\, x_n + 0{,}7 - 0{,}7\, x_n$ donc $x_{n+1} = 0{,}1\, x_n + 0{,}7$.

**3. *a.*** $u_{n+1} = 9\, x_{n+1} - 7 = 9\,(0{,}1\, x_n + 0{,}7) - 7 \Leftrightarrow u_{n+1} = 0{,}9\, x_n + 6{,}3 - 7 \Leftrightarrow u_{n+1} = 0{,}1\,(9\, x_n - 7)$

$u_{n+1} = 0{,}9\, u_n$ donc la suite $(u_n)$ est géométrique de raison 0,1.

***b.*** $u_1 = 9\, x_1 - 7 = 9 \times 0{,}7 - 7 = -\,0{,}7$

$u_n = 0{,}1^{\,n-1}\, u_1$ donc $u_n = -\,0{,}1^{\,n-1} \times 0{,}7$

$-\,1 < 0{,}1 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}1^{\,n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

$x_n = \dfrac{u_n + 7}{9}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \dfrac{7}{9}$