NB : Les quatre propositions peuvent être examinées indépendamment les unes des autres.

On considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas.

1. Pour tout n : $0 \leq v_n \leq 1$.
2. Si la suite (u_n) est convergente. alors la suite (v_n) est convergente.
3. Si la suite (u_n) est croissante; alors la suite (v_n) est croissante.
4. Si la suite (v_n) est convergente; alors la suite (u_n) est convergente.

CORRECTION

1. VRAI

pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n \geq 0$

$v_n - 1 = -\dfrac{1}{1+u_n}$ or pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n - 1 < 0$

soit $v_n < 1$ donc pour tout n : $0 \leq v_n \leq 1$.

2. VRAI

$u_n \geq 0$ donc si la suite (u_n) est convergente, sa limite L est positive ou nulle donc (v_n) converge vers $\dfrac{L}{1+L}$.

3. VRAI

Si la suite (u_n) est croissante; alors $u_{n+1} \geq u_n \geq 0$

donc $1 + u_{n+1} \geq 1 + u_n \geq 1$ donc $\dfrac{1}{1+u_{n+1}} \leq \dfrac{1}{1+u_n}$

soit $-\dfrac{1}{1+u_{n+1}} \geq -\dfrac{1}{1+u_n}$

or $v_n = 1 - \dfrac{1}{1+u_n}$ donc $v_{n+1} \geq v_n$

4. FAUX

$0 \leq v_n < 1$ donc si la suite (v_n) est convergente, sa limite L est positive ou nulle et inférieure ou égale à 1

$v_n (u_n + 1) = u_n$ donc $u_n (1 - v_n) = v_n$

$v_n < 1$ alors $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$

(v_n) converge vers L, si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$ comme $v_n < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc (u_n) n'est pas convergente.