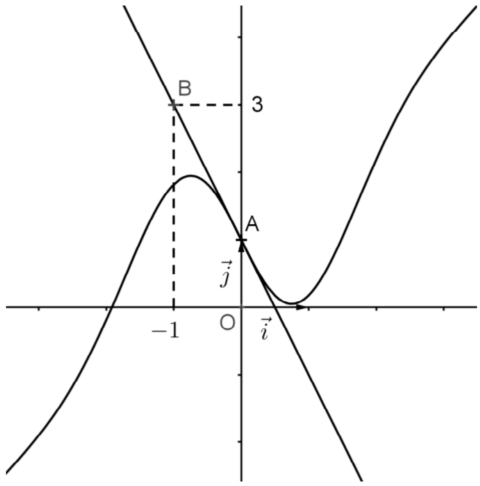
Métropole septembre 2014

EXERCICE 1 5 POINTS Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, une courbe **C** et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives (0 ; 1) et (− 1 ; 3).



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est **C**.

On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 + a\,x\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

1. a. Justifier que la courbe **C** passe par le point A.

b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

c. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = 1 - a\,(2x^2 - 1)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

d. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe **C** au point A.
Déterminer la valeur du réel a.

2. D'après la question précédente, pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 - 3\,x\,\mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{et } f'(x) = 1 + 3\,(2x^2 - 1)\,\mathrm{e}^{-x^2}.$$

a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1\,;0]$, $f(x) > 0$.

b. Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x) > 0$.

c. Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}\,;-1\right]$, tel que $f(c) = 0$.

Justifier que $c < -\frac{3}{2} + 2.10^{-2}$.

3. On désigne par **A** l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par : $c \le x \le 0$ et $0 \le y \le f(x)$.

a. Écrire **A** sous la forme d'une intégrale.

b. On admet que l'intégrale $I = \int_{-\frac{3}{2}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est une valeur approchée de **A** à 10^{-3} près.

Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

EXERCICE 2 5 POINTS Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.

On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\frac{1}{\lambda}$,

Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

a. Déterminer la valeur de λ.

b. Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

c. Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4}.

2. Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à 0,8.

On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

a. Préciser, en fonction de n, les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y, son espérance mathématique $E(Y)$ et son écart-type $\sigma(Y)$.

b. Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 64{,}8$ et d'écart-type $\sigma = 3{,}6$.

Calculer la probabilité p_1 de l'évènement $\{Z \le 71\}$ à l'aide de la calculatrice.

c. On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $p(Y \le 70)$ de l'évènement $\{Z \le 70\}$.

Le restaurant a reçu 81 réservations.

Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent ?

EXERCICE 3 5 POINTS Commun à tous les candidats

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.

c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1% de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4 mL de produit.

Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n.

L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

Variables :	n est un nombre réel.	
	v est un entier naturel.	
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.	
Traitement :	Pour n allant de 1 à 15	
		Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
		Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $0,8 \times v + 4$
		Afficher v.
	Fin de boucle.	

a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4					8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6mL et qu'elle s'arrête au bout de 30minutes.

Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3. On programme la machine de façon que

- à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.

On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

a. Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0,8\, w_n + 1$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$.

Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.

d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

EXERCICE 4 5 POINTS Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées :

$A(1 ; -\sqrt{3} ; 0)$; $B(1 ; \sqrt{3} ; 0)$; $C(-2 ; 0 ; 0)$; $D(0 ; 0 ; 2\sqrt{2})$.

1. Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne :

$$4x + z\sqrt{2} = 4.$$

2. On note D la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

a. Démontrer que D est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.

b. Déterminer les coordonnées du point G, intersection de la droite D et du plan (ABD).

3. a. On note L le milieu du segment [AC].

Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).

b. Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.

4. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.

EXERCICE 4 5 POINTS Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.

On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

— 20% des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte,

— 10% des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris. On pose $a_0 = 0{,}5$ et $b_0 = 0{,}5$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte. On désigne par U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Soit n un entier naturel.

a. Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}$.

b. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c. En déduire que $U_{n+1} = M\,U_n$ où M est une matrice que l'on précisera.

On admet sans démonstration que $U_n = M^n\,U_0$.

d. Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P^2. En déduire que P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{3}P$.

b. Vérifier que $P^{-1}\,M\,P$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$M^n = P\,D^n\,P^{-1}.$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{1-0{,}7^n}{3} \\ \dfrac{2-2\times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{2+0{,}7^n}{3} \end{pmatrix}$.

3. En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ?

CORRECTION

EXERCICE 1 5 POINTS Commun à tous les candidats

1. a. $f(0) = 0 + 1 + a \times 0\,e^0 = 1$ donc la courbe **C** passe par le point A.

b. Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3-1}{-1-0} = -2$

c. Si u est une fonction dérivable, la dérivée de e^u est $u'\,e^u$ donc la dérivée de e^{-x^2} est $-2x\,e^{-x^2}$

$\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x^2} & v'(x) = -2x\,e^{-x^2} \end{cases}$ donc $f'(x) = 1 + a\,(e^{-x^2} - 2x^2\,e^{-x^2})$

$f'(x) = 1 + a\,(1 - 2x^2)\,e^{-x^2}$ donc pour tout réel x, $f'(x) = 1 - a\,(2x^2 - 1)\,e^{-x^2}$.

d. Si la droite (AB) est tangente à la courbe **C** au point A alors le coefficient directeur de la tangente en A est égal au coefficient directeur de la droite (AB) donc $f'(0) = -2$

$f'(0) = 1 + a\,e^0 = 1 + a$ donc $1 + a = -2$ soit $a = -3$ donc $f(x) = x + 1 - 3x\,e^{-x^2}$

2. a. Pour tout réel x de l'intervalle $]-1\,;\,0]$, $x \le 0$ donc $-3x \ge 0$, la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc $-3x\,e^{-x^2} \ge 0$

Pour tout réel x de l'intervalle $]-1\,;\,0]$, $x > -1$ donc $1 + x > 0$

$f(x)$ est la somme de deux termes $1 + x$ strictement positif et $-3x\,e^{-x^2}$ positif donc pour tout réel x de l'intervalle $]-1\,;\,0]$, $f(x) > 0$.

b. $f'(x) = 1 + 3\,(2x^2 - 1)\,e^{-x^2}$.

Pour tout $x \le -1$, $x^2 \ge 1$ donc $2x^2 \ge 2$ donc $2x^2 - 1 > 0$

La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$ donc $e^{-x^2} > 0$

Le produit de termes positifs est un nombre positif donc $3\,(2x^2 - 1)\,e^{-x^2} \ge 0$ donc $1 + 3\,(2x^2 - 1)\,e^{-x^2} \ge 1 > 0$ donc pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x) > 0$.

c. Pour tout réel x de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$, $f'(x) > 0$ d'après la question précédente donc la fonction f est définie continue strictement croissante sur $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$, $f\left(-\frac{3}{2}\right) \approx -0{,}026$ donc $f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0$, $f(-1) = 3$ donc $f\left(-\frac{3}{2}\right) \leq 0 \leq f(-1)$ donc il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2};-1\right]$, tel que $f(c) = 0$.

$f\left(-\frac{3}{2}+2.10^{-2}\right) \approx 0{,}017$ donc $f\left(-\frac{3}{2}\right) \leq 0 \leq f\left(-\frac{3}{2}+2.10^{-2}\right)$ donc f s'annule sur $\left[-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}+2.10^{-2}\right]$, $f\left(-\frac{3}{2}\right) \neq 0$ et $f\left(-\frac{3}{2}+2.10^{-2}\right) \neq 0$ donc $-\frac{3}{2} < c < -\frac{3}{2}+2.10^{-2}$.

3. ***a.*** La fonction f est continue positive sur l'intervalle] − 1 ; 0], donc $\mathbf{A} = \int_c^0 f(x)\,\mathrm{d}x$

b. La dérivée de e^{-x^2} est $-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ donc une primitive de f est $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$

$I = \mathrm{F}(0) - \mathrm{F}\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\times\frac{9}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\left(-\frac{3}{2}\right)^2}\right)$

$I = \frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{8} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2{,}25}\right) = \frac{15}{8} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2{,}25}$

Une valeur approchée de **A** à 10^{-3} près est $\frac{15}{8} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2{,}25}$.

EXERCICE 2 5 POINTS Commun à tous les candidats

1. ***a.*** le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes donc $\frac{1}{\lambda} = 10$ donc $\lambda = \frac{1}{10} = 0{,}1$

b. La variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ donc $P(X \leq 20) = 1 - \mathrm{e}^{-20\lambda}$ et $P(X \leq 10) = 1 - \mathrm{e}^{-10\lambda}$

$P(10 \leq X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 10) = 1 - \mathrm{e}^{-20\lambda} - (1 - \mathrm{e}^{-10\lambda})$

$P(10 \leq X \leq 20) = \mathrm{e}^{-10\lambda} - \mathrm{e}^{-20\lambda} = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}$.

$P(10 \leq X \leq 20) \approx 0{,}2325$

c. Une loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement donc $P_{X \geq 10}(X \geq 15) = P(X \geq 5) = \mathrm{e}^{-5\lambda} = \mathrm{e}^{-0{,}5}$

$P_{X \geq 10}(X \leq 15) \approx 0{,}6065$

2. ***a.*** La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $(n\,;\,0{,}8)$ d'espérance mathématique $E(Y) = 0{,}8\,n$ et d'écart-type $\sigma(Y) = \sqrt{n \times 0{,}8 \times (1 - 0{,}8)} = 0{,}4\sqrt{n}$.

b. $p_1 = P(Z \leq 31) = 0{,}9575$.

c. $P(Y > 70) = 1 - P(Y \leq 70) = 1 - 0{,}9575 = 0{,}0425$

EXERCICE 3 5 POINTS Commun à tous les candidats

1. ***a.*** 20 % du médicament est éliminé par minute donc $u_{n+1} = (1 - 0{,}2)\,u_n$

$u_{n+1} = 0{,}8\,u_n$ La suite (u_n) est géométrique de raison 0,8.

b. Pour tout entier naturel n, $u_n = q^n\,u_0 = 10 \times 0{,}8^n$.

c. $u_n \leq 10 \times \frac{1}{100} \Leftrightarrow u_n \leq 0{,}1$.

$u_0 > 0$, $0 < q < 1$ donc la suite est décroissante, $u_{20} > 0{,}1$ et $u_{21} < 0{,}1$ donc à partir de 21 minutes, la quantité de médicament restant dans le sang devient inférieure à 1% de la quantité initiale.

On pouvait aussi résoudre $u_n \leq 0{,}1$

$u_n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow 10 \times 0{,}8^n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow 0{,}8^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n \ln 0{,}8 \leq \ln 0{,}01$

$\ln 0{,}8 < 0$ donc $n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$ or $20 < \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} < 21$ donc $n \geq 21$

2. *a.*

n	4	5	6
Calcul	$0{,}8 \times 5{,}12 + 4$	$0{,}8 \times 5{,}12 < 5$ donc $v = 8{,}096 + 4$	$0{,}8 \times 6{,}48$
v_n	8,096	6,48	5,18

b. Au bout de 15 minutes, on a injecté initialement 10 mL puis 3 fois 4 mL soit 22 mL

c.

Variables :	n est un nombre réel.
	v est un entier naturel.
Initialisation :	Affecter à v la valeur 10.
Traitement :	Pour n allant de 1 à **30**
	Affecter à v la valeur $0,8 \times v$.
	Si $v <$ **6** alors affecter à v la valeur $0{,}8 \times v +$ **2**
	Afficher v
	Fin de boucle.

3. *a.* Toutes les minutes il reste donc 80% de la quantité précédente soit $0{,}8\, w_n$. On rajoute alors 1 mL donc $w_{n+1} = 0{,}8\, w_n + 1$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$.
$z_{n+1} = w_{n+1} - 5 = 0{,}8\, w_n + 1 - 5 = 0{,}8\, w_n - 4 = 0{,}8\, w_n - 0{,}8 \times 5$
$z_{n+1} = 0{,}8\,(w_n - 5) = 0{,}8\, z_n$
(z_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $z_0 = w_0 - 5 = 5$

c. $w_n = q^n\, w_0 = 5 \times 0{,}8^n$

d. $-1 < 0{,}8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 0$ or $w_n = z_n + 5$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 5$.
Au bout d'un certain temps, l'organisme conservera 5 mL de médicament dans le sang avec ce programme.

EXERCICE 4 5 POINTS Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit P le plan d'équation $4\,x + z\sqrt{2} = 4$.

$4\,x_A + z_A\sqrt{2} = 4 \times 1 + 0 = 4$ donc $A \in P$

$4\,x_B + z_B\sqrt{2} = 4 \times 1 + 0 = 4$ donc $B \in P$

$4\,x_D + z_D\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$ donc $D \in P$

Le plan (ABD) a pour équation cartésienne : $4\,x + z\sqrt{2} = 4$.

2. On note D la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

a. Le point de D de paramètre $t = 0$ a pour coordonnées (0 ; 0 ; 0) donc D passe par O.
Un vecteur directeur de D est $\vec{u}\,(1\,;0\,;\sqrt{2})$

$\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(2\,;0\,;2\sqrt{2})$ donc $\overrightarrow{CD} = 2\,\vec{u}$

D est une droite parallèle à (CD).

b. G appartient à D donc ses coordonnées sont de la forme $(t\,;0\,;t\sqrt{2})$

G appartient au plan (ABD) donc $4\,x_G + z_G\sqrt{2} = 4$ soit $4\,t + 2\,t = 4$ donc $t = \dfrac{2}{3}$, G a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;0\,;\dfrac{2}{3}\sqrt{2}\right)$.

3. *a.* $\overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées $(1\,;\sqrt{3}\,;0)$

L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1-2}{2}\,;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;0\right)$ soit $\left(-\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;0\right)$

$\overrightarrow{BL}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,;0\right)$ donc $\overrightarrow{BL} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$. La droite (BL) passe par le point O.

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-3\,;\sqrt{3}\,;0)$

$\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 1 \times (-3) + \sqrt{3} \times \sqrt{3} + 0 = 0$ donc (OB) et donc (BL) est orthogonale à la droite (AC).

b. $AB^2 = 0 + (2\sqrt{3})^2 + 0 = 12$

$AC^2 = (-3)^2 + \sqrt{3}^{\,2} = 12$

$BC^2 = (-2-1)^2 + \sqrt{3}\ 2 = 12$

AB = AC = BC donc le triangle ABC est équilatéral.
L est le milieu de [AC] donc (BL) est la médiane issue de B du triangle ABC.

Le centre de gravité (qui est aussi le centre du cercle circonscrit) se trouve au 2/3 de cette médiane en partant de B donc $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BL}$

or $\overrightarrow{BL} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{BO} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BL}$ donc G = O

4. AB = AC = BC, il suffit donc de calculer AD, BD et CD

$AD^2 = 1^2 + \sqrt{3}^{\,2} + (2\sqrt{2})^2 = 1 + 3 + 8 = 12$

$BD^2 = 1^2 + \sqrt{3}^{\,2} + (2\sqrt{2})^2 = 1 + 3 + 8 = 12$

$CD^2 = (-2)^2 + (2\sqrt{2})^2 = 4 + 8 = 12$

Les six arêtes ont la même longueur donc le tétraèdre ABCD est régulier.

EXERCICE 4 5 POINTS Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $a_1 = 0{,}8 \times a_0 + 0{,}1\, b_0 = 0{,}8 \times 0{,}1 + 0{,}1 \times 0{,}5 = 0{,}45$

$a_1 + b_1 = 1$ donc $b_1 = 0{,}55$ donc $U_1 = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}55 \end{pmatrix}$.

b. $a_{n+1} = 0{,}8 \times a_n + 0{,}1\, b_n$
$b_{n+1} = 0{,}2 \times a_n + 0{,}9\, b_n$

c. Soit $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ alors $U_{n+1} = M\,U_n$

d. Au bout de 3 jours on a $U_3 = M^3\, U_0 = \begin{pmatrix} 0{,}3905 \\ 0{,}6095 \end{pmatrix}$.

2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\, I_2$

$\dfrac{1}{3} P \times P = I_2$ donc P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{3} P$.

b. $P^{-1} M P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} M P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}4 & -0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2{,}1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ donc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

c. **Initialisation :**
$P^{-1} M P = D$ donc $P \times P^{-1} M P \times P^{-1} = P \times D \times P^{-1}$
donc $M = P \times D^1 \times P^{-1}$, La propriété est vraie pour $n = 1$

Hérédité :
Montrons que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que pour tout n entier naturel non nul, si $M^n = P\, D^n\, P^{-1}$ alors $M^{n+1} = P\, D^{n+1}\, P^{-1}$
$M^{n+1} = M^n \times M$ donc $M^{n+1} = M^n \times M$
$M^{n+1} = P\, D^n\, P^{-1} \times P\, D\, P^{-1}$ or $P^{-1} \times P = I_2$
donc $M^{n+1} = P\, D^n \times I_2 \times D\, P^{-1}$
$M^{n+1} = P\, D^n \times D\, P^{-1}$ donc $M^{n+1} = P\, D^{n+1}\, P^{-1}$.
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel non nul, $M^n = P\, D^n\, P^{-1}$

3. $U_n = M^n\, U_0$

$$U_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1+2\times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{1-0{,}7^n}{3} \\ \dfrac{2-2\times 0{,}7^n}{3} & \dfrac{2+0{,}7^n}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$a_n = \dfrac{1}{3} \times 0{,}5\,(1 + 2 \times 0{,}7^n) + \dfrac{1}{3} \times 0{,}5\,(1 - 0{,}7^n)$

$b_n = \dfrac{1}{3} \times 0{,}5\,(2 - 2 \times 0{,}7^n) + \dfrac{1}{3} \times 0{,}5\,(2 + 0{,}7^n)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}7^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{1}{3} \times 0{,}5 + \dfrac{1}{3} \times 0{,}5 = \dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \dfrac{1}{3} \times 0{,}5 \times 2 + \dfrac{1}{3} \times 0{,}5 \times 2 = \dfrac{2}{3}$

Sur le long terme la cage A contiendra donc un tiers de la population des souris et la cage B les deux tiers.