86 **a)** $\mathrm{J} - \mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 1\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{6}$

$$\mathrm{I} + \mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-\sin x - \cos x}{\cos x - \sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\ln(\cos x - \sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$\mathrm{I} + \mathrm{J} = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) + \ln 1 = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

b) $\mathrm{I} = \dfrac{-\pi}{12} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

$\mathrm{J} = \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

87

$$\int_{-1}^{2} |t^2 - 2t|\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} |t^2 - 2t|\,\mathrm{d}t + \int_0^2 |t^2 - 2t|\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-1}^{0} (t^2 - 2t)\,\mathrm{d}t + \int_0^2 (2t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - t^2\right]_{-1}^{0} + \left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

88 **a)** Pour tout $x \in [-1\,;2]$, $x^2 - x - 2 \leqslant 0$ donc :

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\,\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

b) Pour tout $x \in [-1\,;0]$, $x\mathrm{e}^{-x} \leqslant 0$, donc $\int_{-1}^{0} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

c) Pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$, $\ln x^2 \leqslant 0$, donc $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x^2\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

d) Pour tout $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \sin(2x) \geqslant 0$, donc :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin(2x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

89 **a)** Pour tout $x \geqslant 1$, $t \ln t \geqslant 0$ sur $[1\,;x]$ donc $\mathrm{F}(x) \geqslant 0$.

Pour tout $0 < x < 1$, $\mathrm{F}(x) = -\int_x^1 t \ln t\,\mathrm{d}t$.

Pour tout $t \in [x\,;1]$, $t \ln t < 0$, donc $\mathrm{F}(x) > 0$. Ainsi pour tout $x > 0$, $\mathrm{F}(x) \geqslant 0$.

b) $\mathrm{F}'(x) = x \ln x$ et $\mathrm{F}(1) = 0$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4}(2x^2 \ln x - x^2 + 1)$ s'annule en 1 et a pour dérivée la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{4}\left(4x \ln x + 2x^2 \times \frac{1}{x} - 2x\right) = x \ln x,$$

d'où $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{4}(2x^2 \ln x - x^2 + 1)$.

c) On a vu que pour tout $x > 0$, $\mathrm{F}(x) \geqslant 0$, donc $\dfrac{1}{4}(2x^2 \ln x - x^2 + 1) \geqslant 0$, c'est-à-dire $\ln x \geqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2x^2}$.

90 **a)** $-x \leqslant f(x) \leqslant x^2$ donc :

$$\int_1^2 (-x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$$

c'est-à-dire $\left[-\dfrac{x^2}{2}\right]_1^2 \leqslant \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_1^2$

donc $-2 + \dfrac{1}{2} \leqslant \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3}$

d'où $-\dfrac{3}{2} \leqslant \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{7}{3}$

b) $\dfrac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$ donc $\int_1^2 \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

donc $\left[\dfrac{-1}{x}\right]_1^2 \leqslant \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant [\ln x]_1^2$

donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \ln 2$

91 **a)** Pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos x \leqslant 1$

$1 \leqslant 1 + \cos x \leqslant 2$

$1 = \sqrt{1} \leqslant \sqrt{1 + \cos x} \leqslant \sqrt{2}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$

donc $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x}\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\sqrt{2}$

92 **a)** Pour tout $x \in [0\,;1]$, $1 \leqslant 1 + x \leqslant 2$, donc :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1.$$

b) $\int_0^x \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \dfrac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x 1\,\mathrm{d}t$

$\dfrac{1}{2}x \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ donc pour $x = 1$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \ln 2 \leqslant 1$.

93 **a)** Sur $[-5\,;-2]$, $f(x) < 0$, donc $\int_{-5}^{-2} f(t)\,\mathrm{d}t < 0$.

Sur $[0\,;3]$, $f(x) \geqslant 0$, donc $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

b) Pour tout $x \in [0\,;1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$, donc $\int_0^1 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 f(t)\,2\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 2\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire :

$$0 \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2.$$

Pour tout $x \in [1\,;2]$, $1 < f(x) \leqslant 2$, donc $1 < \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2$.

94 **a)** $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x x^2 - 2x\mathrm{e}^x}{x^4} = \dfrac{x\mathrm{e}^x(x-2)}{x^4}$.

Pour tout $x \in [1\,;2]$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[1\,;2]$.

b) Pour tout $x \in [1\,;2]$, $f(1) \geqslant f(x) \geqslant f(2)$ c'est-à-dire :

$$\mathrm{e} \geqslant \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} \geqslant \frac{\mathrm{e}^2}{4}.$$

c) $\mathrm{e} \geqslant \int_1^2 \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$.

95 **a)** $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$, f est donc strictement croissante sur $[0\,;1]$.

b) Pour tout x de [0 ; 1], $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$, c'est-à-dire :

$$2 \leqslant f(x) \leqslant \frac{5}{2}.$$

c) $\int_0^1 2e^x \, dx \leqslant \int_0^1 e^x f(x) \, dx \leqslant \int_0^1 e^x \frac{5}{2} \, dx$

$$[2e^x]_0^1 \leqslant \int_0^1 e^x f(x) \, dx \leqslant \left[\frac{5}{2}e^x\right]_0^1$$

$$2e - 2 \leqslant \int_0^1 f(x) e^x \, dx \leqslant \frac{5}{2}e - \frac{5}{2}.$$

96 **a)**

$$\mu = \frac{1}{0-(1)}\int_{-1}^{0}(2-x)(x-1)\,dx = \int_{-1}^{0}(-x^2+3x-2)\,dx$$

$$\mu = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^{0} = -\frac{23}{6}$$

b) $\mu = \dfrac{1}{1-0}\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$

c) $\mu = \dfrac{1}{1-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-3x+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}e^{-3x+1}\right]_{-1}^{1}$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}e^{-2} + \frac{1}{3}e^{4}\right)$$

97 $\ell = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 e^{2x-3}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x-3}\right]_0^2 = \frac{1}{4}(e - e^{-3})$

98 **a)** $\mu = \displaystyle\int_0^1 (x^2+x-2)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^1 = -\frac{7}{6}$

b) $x^2 + x - 2 = -\dfrac{7}{6} \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 5 = 0$

$\Delta = 4 \times 39$

$x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{39}}{6} < 0$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{39}}{6} \in [0\,;1]$.

99 $\mu = \dfrac{1}{200}\displaystyle\int_{-100}^{100} 68{,}5\left(e^{\frac{x}{137}} + e^{-\frac{x}{137}}\right)dx$

$$= \frac{137}{400}\left[137e^{\frac{x}{137}} - 137e^{-\frac{x}{137}}\right]_{-100}^{100}$$

$$\mu = \frac{18\,769}{400}\left[2e^{\frac{100}{137}} - 2e^{-\frac{100}{137}}\right]$$

$$\mu = \frac{18\,769}{200}\left[e^{\frac{100}{137}} - e^{-\frac{100}{137}}\right] \approx 149$$

La hauteur moyenne de la ligne électrique est 149 mètres.

7. Objectif Bac

100 **1. c)** **2. b)** **3. c)** **4. c)**

101 **1. Vrai** : G(0) = G(1) = 0

2. Vrai : G est dérivable sur [0 ; +∞[car f est continue.

Sur [0 ; + ∞[, $G'(x) = F(x) + xf(x)$

3. Vrai car sur [0 ; 1], $xf(x) > 0$ mais $F(x)$ est négative

4. Faux.

$$\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt$$

$$= -\int_1^0 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = F(2) - F(0)$$

102 **1. Vrai** **2. Faux** **3. Faux** **4. Vrai** **5. Faux**

103 **1.** f est dérivable sur [0 ; 1]

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2} > 0$$

f est strictement croissante sur [0 ; 1]

2. a) k un nombre entier compris entre 0 et 4 et x est un réel de [0 ; 5] tel que :

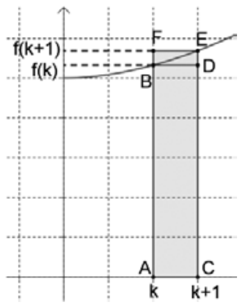
$$\frac{k}{5} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{5}$$

$f\left(\dfrac{k}{5}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\dfrac{k+1}{5}\right)$ car f est strictement croissante sur [0 ; 1]. Donc :

$$\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\frac{k}{5}\right)dx \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,dx \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\frac{k+1}{5}\right)dx$$

$$f\left(\frac{k}{5}\right)\left(\frac{k+1}{5} - \frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,dx \leqslant f\left(\frac{k+1}{5}\right)\left(\frac{k+1}{5} - \frac{k}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$



L'aire de la surface limitée par les droites d'équations $x = k$, $x = k+1$, $y = 0$ et $\mathscr{C}$ est comprise entre les aires des rectangles ABDC et AFEC.

b) Pour $k = 0$, $\dfrac{1}{5}f(0) \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{5}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{5}f\left(\frac{1}{5}\right)$

Pour $k = 4$, $\dfrac{1}{5}f\left(\dfrac{4}{5}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{4}{5}}^{\frac{5}{5}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{5}f(1)$

On obtient :

$$\frac{1}{5}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + \ldots + f\left(\frac{4}{5}\right)\right] \leqslant \int_0^{\frac{1}{5}} f(x)\,dx + \ldots + \int_{\frac{4}{5}}^{\frac{5}{5}} f(x)\,dx$$

$$\leqslant \frac{1}{5}\left[f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + \ldots + f(1)\right]$$

(D'après la relation de Chasles)

Soit $\dfrac{1}{5}S_4 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{5}[S_5 - f(0)]$

$\dfrac{1}{5}S_4 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{5}[S_5 - 1]$

c) $S_4 \approx 5{,}4587$ et $S_5 \approx 6{,}8178$

D'où $1{,}091 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant 1{,}164$

3. a) x est un nombre réel de [0 ; 1] :

$$1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{1 + x - x - x^2 + x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

b) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x}\,dx = \int_0^1 e^x\left(1 - x + \frac{x^2}{1+x}\right)dx = \int_0^1 e^x(1-x)\,dx + I$

(Par linéarité de l'intégrale)

c) $g(x) = (2-x)\,e^x$.

g est dérivable sur [0 ; 1] et

$g'(x) = -e^x + (2-x)\,e^x = (1-x)\,e^x$.

$\int_0^1 (1-x)\,e^x\,dx = [(2-x)e^x]_0^1 = e - 2$

d) D'après la question **2**,

$1{,}091 \leqslant (e^1 - 2) + I \leqslant 1{,}164$

$3{,}091 - e \leqslant I \leqslant 3{,}164 - e$

soit $0{,}3 \leqslant I \leqslant 0{,}4$.

104 **Partie A**

Sur $[a\,;b]$; $g(x) - f(x) \geqslant 0$

Donc $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geqslant 0$

Et par linéarité, $\int_a^b g(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx$

Partie B

1. a) Sur [0 ; 1], $f'(x) = -2x\,e^{-x^2} \leqslant 0$.

f est donc décroissante sur [0 ; 1].

Donc pour tout x de [0 ; 1],

$$f(0) \geqslant f(x) \geqslant f(1) \text{ soit } \frac{1}{e} \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

b) $\int_0^1 \frac{1}{e}\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 dx$

Soit $\frac{1}{e} \leqslant u_0 \leqslant 1$

2. $u_1 = \int_0^1 x e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 -2x e^{-x^2} \times \frac{1}{-2}\,dx$

$= -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^1$

$= -\frac{1}{2}[e^{-1} - 1] = \frac{1 - e^{-1}}{2}$

3. a) n est un nombre entier de $\mathbb{N}^*$

$x^n e^{-x^2} \geqslant 0$ sur [0 ; 1] donc $u_n \geqslant 0$ (D'après la **Partie A**)

Pour $n = 0$, $u_0 \geqslant 0$ (D'après **1. b)**)

Donc pour tout nombre entier n, $u_n \geqslant 0$

b) x est un nombre réel de [0 ; 1]

$x^{n+1}\,e^{-x^2} - x^n\,e^{-x^2} = x^n\,e^{-x^2}\,(x-1) \leqslant 0$

car $x \in [0\,;1]$

Donc $x^{n+1}\,e^{-x^2} \leqslant x^n\,e^{-x^2}$ et d'après la **partie A**, $u_{n+1} \leqslant u_n$

La suite est décroissante.

La suite (u_n) est donc minorée par 0 et décroissante donc convergente.

4. a) Sur [0 ; 1], $e^{-x^2} \leqslant 1$ donc :

$$x^n\,e^{-x^2} \leqslant x^n \text{ car } x^n \geqslant 0$$

Donc d'après la **partie A**,

$$u_n \leqslant \int_0^1 x^n\,dx$$

Soit $u_n \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ et $u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

b) $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

105 **1.** n est un nombre entier de $\mathbb{N}^*$

$J_{n+1} - J_n = \int_1^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt - \int_1^n e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$

D'après la relation de Chasles,

$$J_{n+1} - J_n = \int_n^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt$$

Sur $[n\,;n+1]$, $e^{-t}\sqrt{1+t} \geqslant 0$

Donc $\int_n^{n+1} e^{-t}\sqrt{1+t}\,dt \geqslant 0$

Soit $J_{n+1} \geqslant J_n$, la suite (J_n) est croissante.

2. a) Pour tout $t \geqslant 1$, $0 \leqslant t^2 + t$

Donc $t + 1 \leqslant t^2 + 2t + 1$ soit

$t + 1 \leqslant (t+1)^2$ c'est-à-dire $\sqrt{t+1} \leqslant t + 1$.

b) $e^{-t}\sqrt{t+1} \leq e^{-t}(t+1)$ car $e^{-t} \geqslant 0$

Donc $\int_1^n e^{-t}\sqrt{t+1}\,dt \leqslant \int_1^n e^{-t}(t+1)\,dt$

Soit $J_n \leqslant I_n$

c) On détermine une primitive de $t \mapsto (t+1)e^{-t}$. a et b sont deux nombres réels, $t \mapsto (at+b)e^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $t \mapsto ae^{-t} - (at+b)e^{-t}$ soit

$t \mapsto e^{-t}(-at + a - b)$

$-a = 1$ et $a - b = 1$

Soit $a = -1$ et $b = -2$

Une primitive de $t \mapsto (t+1)e^{-t}$ est $t \mapsto (-t-2)e^{-t}$

$I_n = [-(t+2)e^{-t}]_1^n = -(n+2)e^{-n} + \frac{3}{e} \leqslant \frac{3}{e}$

Donc pour tout n de N*, $J_n \leqslant \frac{3}{e}$

d) La suite (J_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.

106 **a)** Pour k variant de 0 à N – 1

$S \leftarrow S + \frac{1}{\sqrt{1 + X^2}}$

$X \leftarrow X + H$

FinPour

$S \leftarrow S \times H$

b) On obtient $\frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}}\right) \approx 0{,}9$

c) $F'(x) = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $\ell = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\ln(x + \sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$

8. Travaux pratiques

107 **b)** $S_1 = 0{,}5$; $S_2 \approx 0{,}583\,3$; $S_3 \approx 0{,}616\,7$

$$\mathrm{S}_1 = \frac{1}{1} \times f(2) = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{S}_2 = \frac{1}{1}\left[f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{7}{12}$$

$$\mathrm{S}_3 = \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right) + f(2)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right] = \frac{37}{60}$$

c) (S_n) semble croissante et tend vers $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

2. Démonstration

a) Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{n+1}{n}\right) + f\left(\frac{n+2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{2n}{n}\right)\right]$$

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{n}\left[\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \ldots + \frac{n}{2n}\right]$$

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

b) Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$\mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

(S_n) est donc croissante.

Pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{S}_n \leqslant \underbrace{\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1}}_{n \text{ fois}} = \frac{n}{n+1} \leqslant 1.$

On peut en déduire que (S_n) est convergente.

c) Pour tout $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ $(n \geqslant 1)$,

$\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n+k+1} \leqslant \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+k}.$$

En sommant pour $k = 0$ à $k = n - 1$, on obtient :

$\mathrm{S}_n \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{S}_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{S}_n \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{S}_n + \frac{1}{2n}.$$

d) Pour tout $n \geqslant 1$, $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2n} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, c'est-à-dire $\ln 2 - \frac{1}{2n} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant \ln 2$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \ln 2$.

108 **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{b}{n}\left[f\left(\frac{b}{n}\right) + f\left(\frac{2b}{n}\right) + \ldots + f(b)\right]$$

$$v_n = \frac{b}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{b}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)\right]$$

d'où $v_n - u_n = \frac{b}{n}[f(0) - f(b)]$

$$v_n - u_n = \frac{b}{n}\left[1 - \mathrm{e}^{-b^2}\right].$$

b) On cherche la valeur de N de telle sorte que la différence d'aire entre v_n et u_n soit inférieure ou égale à 10^{-4}.

À la ligne 12, on met $\mathrm{U} \leftarrow \mathrm{U} + \mathrm{A} \times \mathrm{e}^{-(k\mathrm{A})^2}$.

c) $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}746\,7$

d) On met à la ligne 7 :

TantQue $\mathrm{A} \times \left(1 - \mathrm{e}^{-b^2}\right) > 10^{-6}$.

109 **1. c)** Il y a invariance de l'aire par translation, donc :

aire $(\mathscr{D}') =$ aire $(\mathscr{D})$.

d) aire $(\mathscr{D}') \approx 2{,}55$.

2. Avec le calcul intégral

a) Pour tout $x \in [1\,;4]$, $\ln x \geqslant 0$ donc $h(x) = \ln x + \frac{3}{2} \geqslant 0$.

Pour tout $x \in [1\,;4]$:

$$k(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x = \frac{1}{2}x(4 - x) \geqslant 0$$

b) $d'(x) = \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$ sur $[1\,;4]$.

x	0	4
d	0 ↗	$2\ln 2 + \frac{3}{2}$

D'après le tableau, pour tout $x \in [1\,;4]$, $\mathrm{d}(x) \geqslant 0$, donc :

$$f(x) \geqslant g(x).$$

c) Aire $(\mathscr{D}') = \int_1^4 h(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^4 k(x)\,\mathrm{d}x$

Aire $(\mathscr{D}') = \int_1^4 [h(x) - k(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^4 (f - g)(x)\,\mathrm{d}x$

d) $x \mapsto x\ln x - x$ a pour dérivée $x \mapsto 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1$, c'est-à-dire $x \mapsto \ln x$.

$$\text{aire } (\mathscr{D}) = \int_1^4 \left[\ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[x\ln x - x + \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x\right]_1^4 = 4\ln 4 - 3$$

110 **1. b)** On peut conjecturer $\mathrm{I}_{\text{eff}}^2 = 0{,}5$.

$\mathrm{I}_{\text{eff}}^2$ est constant quel que soit ω.

c)

$\mathrm{I}_{\max}$	1	2	3	4	5
I_{eff}	$\sqrt{0{,}5} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$2\sqrt{2}$	$\frac{5\sqrt{2}}{2}$

d) $\mathrm{I}_{\text{eff}} = \mathrm{I}_{\max}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. a) $\mathrm{I}\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \mathrm{I}_{\max}\sin\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right)$

$$= \mathrm{I}_{\max}\sin(\omega t + 2\pi)$$

sin est 2π périodique donc :

$$\mathrm{I}\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \mathrm{I}_{\max}\sin(\omega t) = \mathrm{I}(t).$$

I est périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$.

b) $\mathrm{I}_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{I}_{\max}^2 \sin^2(\omega t)\,dt$

$$\mathrm{I}_{\text{eff}}^2 = \frac{\mathrm{I}_{\text{max}}^2}{\mathrm{T}}\left[\frac{2\omega t - \sin(2\omega t)}{4\omega}\right]_0^{\mathrm{T}}$$

$$\mathrm{I}_{\text{eff}}^2 = \frac{\mathrm{I}_{\text{max}}^2}{\mathrm{T}}\left(\frac{2\omega \mathrm{T} - \sin(2\omega \mathrm{T})}{4\omega}\right)$$

Or $\mathrm{T} = \dfrac{2\pi}{\omega}$ donc $\mathrm{I}_{\text{eff}}^2 = \mathrm{I}_{\text{max}}^2\left(\dfrac{4\pi - \sin(4\pi)}{4 \times 2\pi}\right)$

$$\mathrm{I}_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{I}_{\text{max}}^2$$

c) $\mathrm{I}_{\text{eff}} > 0$ donc $\mathrm{I}_{\text{eff}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}\mathrm{I}_{\text{max}}$ c'est-à-dire $\mathrm{I}_{\text{eff}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{I}_{\text{max}}$.

9. Exercices d'entraînement

111 **1.** $f'(x) = \dfrac{110 \times \frac{1}{x} \times x - 110(\ln x - 2)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{110(3 - \ln x)}{x^2}$$

$3 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow 3 \geqslant \ln x \Leftrightarrow x \leqslant e^3$

x	10		e^3		90
$3 - \ln x$		$+$	0	$-$	
f	$11(\ln 10 - 2)$	$\nearrow$	$\dfrac{110}{e^3}$	$\searrow$	$\dfrac{110(\ln 90 - 2)}{90}$

$e^3 \approx 20{,}085$.

La capacité pulmonaire est maximale à 20 ans.

2. a) $\mathrm{F}'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x}\ln x$

b) $\mu = \dfrac{1}{50}\displaystyle\int_{20}^{70} f(x)\,dx = \dfrac{1}{50}\left[55(\ln x)^2 + 220\ln x\right]_{20}^{70}$

$$\mu = \frac{1}{50}(55(\ln 70)^2 - 220\ln 70 - 55(\ln 20)^2 + 220\ln 20)$$

$\mu \approx 4{,}4$ L par défaut.

112 **a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x} = f(x).$$

b) • $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^{-2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{-2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ d'où :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

c) $f'(x) = -9e^{-2x} + 9e^{-3x}$

$f'(x) = 9e^{-3x}(1 - e^{x})$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $9e^{-3x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - e^{x}$.

$1 - e^{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$.

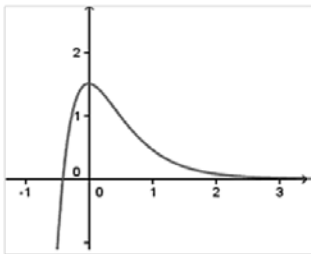
x	$-\infty$		e^3		$+\infty$
$1 - e^{x}$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	0

d) Avec (Oy) : $f(0) = \dfrac{3}{2}$, ce qui donne le point de coordonnées $\left(0\,;\dfrac{3}{2}\right)$

Avec (Ox) : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{9}{2}e^{-2x} = 3e^{-3x} \Leftrightarrow 3e^{x} = 2$

$\Leftrightarrow x = \ln\dfrac{2}{3}$, ce qui donne le point de coordonnées $\left(\ln\left(\dfrac{2}{3}\right); 0\right)$

e) $f(1) = \dfrac{9}{2}e^{-2} - 3e^{-3} \approx 0{,}46$



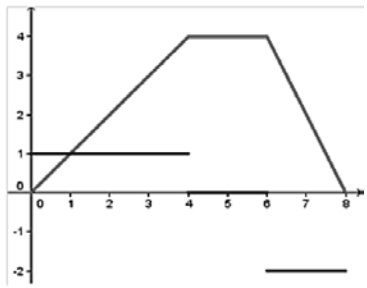
f) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \left[-\frac{9}{4}e^{-2x} + e^{-3x}\right]_0^1 = -\frac{9}{4}e^{-2} + e^{-3} + \frac{5}{4}$

$\mathcal{A} = -\dfrac{9}{4}e^{-2} + e^{-3} + \dfrac{5}{4}$ cm^2

$\mathcal{A} \approx 1$ cm^2.

113 **a)** Pour tout $t \geqslant 0$, $a(t) = v'(t)$.

b)



c) • Sur [0 ; 4], la voiture accélère car $a(t) > 0$.

• Sur [3 ; 6], la voiture a une vitesse constante car $a(t) = 0$.

• Sur [6 ; 8], la voiture freine car $a(t) < 0$.

d) $\dfrac{2 \times 4}{2} = 4$ m.

2. a) Pour tout $t \in [0\,; 6]$, $d(t) = v'(t)$.

b) $\displaystyle\int_6^8 v(t)\,dt = \int_6^8 (16 - 2t)\,dt = \left[16t - t^2\right]_6^8$

$$\int_6^8 v(t)\,dt = 64 - 60 = 4$$

c) $\displaystyle\int_0^\lambda v(t)\,dt = 19$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^4 v(t)\,dt &= \int_0^4 t\,dt = \frac{4 \times 4}{2} = 8\\ \int_4^6 v(t)\,dt &= \int_4^6 4\,dt = 2 \times 4 = 8\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda > 6$$

$$\int_6^\lambda v(t)\,dt = 16\lambda - \lambda^2 - 60$$

On cherche λ tel que $-\lambda^2 + 16\lambda - 60 = 19$.

On trouve $\lambda = 7$ ou $\underbrace{\lambda = 9}_{\text{à exclure}}$.

114 **1. a)** $F(0) = \int_0^0 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

b) f continue et positive sur [0 ; 4], donc F(4) représente l'aire sous la courbe sur [0 ; 4].
$2 \times 3 \leqslant F(4) \leqslant 4 \times 3$, d'où $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$.
c) Pour tout $x \in [-3\,;0]$, $F(x) = -\int_x^{-3} f(x)\,\mathrm{d}x$, c'est-à-dire :

$$\int_x^{-3}(-f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Sur [– 3 ; 0], $-f(x) \geqslant 0$ donc $F(x) \geqslant 0$.
2. Pour tout $x \in [0\,;4]$, $f(x) \geqslant 0$ et f continue sur [0 ; 4] donc $F'(x) = f(x)$.
– f est continue sur [– 3 ; 0] et sur [4 ; 7] donc $-f$ admet une primitive H sur ces intervalles.
$F(x) = \int_x^0 (-f(t))\,\mathrm{d}t = [H(t)]_x^0 = H(0) - H(x)$

$F'(x) = -H'(x) = -(-f(x)) = f(x)$
Donc pour tout $x \in [-3\,;7]$, $F'(x) = f(x)$.

x	– 3		0		4		7
$f(x)$		–	0	+	0	–	
F	F(– 3)	↘	0	↗	F(4)	↘	F(7)

3. Oui la courbe B.
Même monotonie que F et F(0) = 0.

115 **1.** $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g'(x) = \dfrac{1}{a\sqrt{x}}$.

$T_2 : y = \dfrac{1}{a^2}(x - a^2) + \ln a^2$

$\quad y = \dfrac{1}{a^2}x - 1 + 2\ln a$

$T_2 : y = \dfrac{1}{a^2}(x - a^2) + 2$

$\quad y = \dfrac{1}{a^2}x + 1$

On doit donc avoir $-1 + 2\ln a = 1$, ce qui donne $a = \mathrm{e}$.
D'où $g(x) = \dfrac{2}{\mathrm{e}}\sqrt{x}$.
2. a) La fonction $x \mapsto x\ln x - x$ a pour fonction dérivée $x \mapsto \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1$, c'est-à-dire $x \mapsto \ln x$.
$x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{2}{3}\sqrt{x} + \dfrac{2}{3}x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ c'est-à-dire $x \mapsto \dfrac{2}{3}\sqrt{x} + \dfrac{1}{3}\sqrt{x}$ donc $x \mapsto \sqrt{x}$.

b) $\int_0^{\mathrm{e}^2} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{e}^2} \dfrac{2}{\mathrm{e}}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{4}{3\mathrm{e}}x\sqrt{x}\right]_0^{\mathrm{e}^2}$

$\int_0^{\mathrm{e}^2} g(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{4\mathrm{e}^2}{3}$

$\int_1^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln x - x]_1^{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^2 + 1$

L'aire de la partie colorée est donc en u.a. :

$$\frac{4\mathrm{e}^2}{3} - \mathrm{e}^2 - 1 = \frac{1}{3}\mathrm{e}^2 - 1.$$

116 **1.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.
2. a) Il s'agit d'une valeur approchée de $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

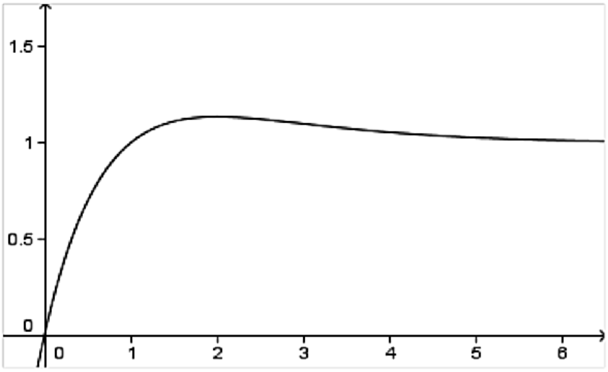
b) $A = \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 0{,}682\ 68$

$B = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 0{,}135\ 91$

$C = \int_{-3}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

$C \approx 0{,}157\ 31$.

117 **Partie A. 1.**



2. a) $g(2) = \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$

f est positive et continue sur [0 ; 2], donc $g(2)$ représente l'aire, en u.a., sous $\mathscr{C}$ sur [0 ; 2].
b) Pour tout $t \in [0\,;2]$, $0 \leqslant f(t) \leqslant 1 + \mathrm{e}^{-2}$ donc :

$$\int_0^2 0\,\mathrm{d}t \leqslant g(2) \leqslant \int_0^2 (1 + \mathrm{e}^{-2})\,\mathrm{d}t$$

$0 \leqslant g(2) \leqslant 2(1 + \mathrm{e}^{-2})$
Or $2(1 + \mathrm{e}^{-2}) \approx 2{,}27$ donc $0 \leqslant g(2) \leqslant 2{,}5$.
3. a) Pour tout $t \geqslant 2$, $f(t) \geqslant 1$ donc pour tout $x \geqslant 2$, $\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_2^x 1\,\mathrm{d}t$, c'est-à-dire $\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x - 2$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Or $g(x) = \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

4. $g'(x) = f(x) > 0$, donc g strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Partie B
1. $g(x) = -x\,\mathrm{e}^{-x} + x$
2. $g(2) = 2 - 2\mathrm{e}^{-2} \leqslant 2{,}5$ et $g(0) \geqslant 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

3. $g(x) = -\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + x$, $x \mapsto -\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $x \mapsto x$ également donc g croissante sur $[0\,;+\infty[$.

118 **1. a)** $f'(x) = \ln(1 + x) + \dfrac{x}{1 + x} > 0$ pour tout x, positif ou nul, donc f strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$
b) $h > 0$
$hf(x_0) \leqslant \mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0) \leqslant hf(x_0 + h)$ d'où :

$$f(x_0) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0 + h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h)$$

c) $-x_0 \leqslant h < 0$: $-hf(x_0 + h) \leqslant \mathscr{A}(x_0) - \mathscr{A}(x_0 + h) \leqslant -hf(x_0)$

$$f(x_0 + h) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0) - \mathscr{A}(x_0 + h)}{-h} \leqslant f(x_0)$$

$$f(x_0+h) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0+h)-\mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$$

d) f est continue en x_0, donc $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

D'après le théorème des gendarmes, :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathscr{A}(x_0+h)-\mathscr{A}(x_0)}{h} = f(x_0).$$

$\mathscr{A}$ est donc dérivable en x_0 et $\mathscr{A}'(x_0) = f(x_0)$.

2. Application

$F'(x) = x\ln(x+1) > 0$ donc F est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

119 **a)** $\mathscr{A}_1 = \int_0^a e^{1-x}\,dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^a = e - e^{1-a}$

b) $T : y = -e^{1-a}(x-a) + e^{1-a}$

$y = 0 \Leftrightarrow x = 1+a$ d'où $C(1+a\,;0)$

$$\mathscr{A}_2 = \frac{AC \times AB}{2} = \frac{e^{1-a}}{2}$$

c) $\mathscr{A}_1 + 2\mathscr{A}_2 = e$ est indépendant de a.

120 **1. a)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$4 - \frac{4}{e^x+1} = \frac{4(e^x+1)-4}{e^x+1} = \frac{4e^x}{e^x+1} = f(x)$$

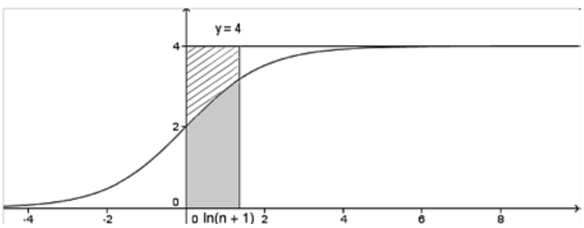
b) • $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$.

La droite d'équation $y = 4$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

• $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

L'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

c)



2. a) u_n représente, en u.a., l'aire comprise entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \ln n$ et $x = \ln(n+1)$.

b) $u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{4e^x}{e^x+1}\,dx = \left[4\ln(e^x+1)\right]_{\ln n}^{\ln(n+1)}$

$u_n = 4\ln(n+2) - 4\ln(n+1)$

$$u_n = 4\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

3. S_n est l'aire, en u.a., comprise entre $\mathscr{C}$ l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln(n+1)$.

Pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_n = \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx + \ldots + \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} f(x)\,dx$$

$$S_n = \int_0^{\ln(n+1)} f(x)\,dx = 4\ln\left(\frac{n+2}{2}\right)$$

$$S_n = 4\left[\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]$$

$$S_n = 4\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

4. a) $\mathscr{A}(n) = 4\ln(n+1) - \int_0^{\ln(n+1)} f(x)\,dx$

$\mathscr{A}(n) = 4\ln(n+1) - S_n$

$\mathscr{A}(n) = 4\ln(n+1) - 4\ln(n+2) + 4\ln 2$

$$\mathscr{A}(n) = 4\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) + 4\ln 2$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}(n) = 4\ln 2$.

121 **1. a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout x de $[-1\,;n]$:

$(1+x)e^{-x} \geqslant 0$ donc $I_n \geqslant 0$.

b) I_n représente, en u.a., l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et des droites d'équations $x = -1$ et $x = n$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt \geqslant 0$ car $f \geqslant 0$ donc I croissante.

2. a) La fonction $x \mapsto \int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ définie sur $\mathbb{R}$ a pour dérivée $x \mapsto f(x)$.

$x \mapsto (-2-x)e^{-x} + e$ a pour dérivée $x \mapsto f(x)$.

De plus, elles s'annulent toutes les deux en -1 donc elles sont égales.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = (-2-n)e^{-n} + e$

c) $I_n = -2e^{-n} - ne^{-n} + e$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -ne^{-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = e$.

3. $\int_{-1}^{\alpha} f(t)\,dt = (-2-\alpha)^{e^{-\alpha}} + e$.

En prenant $\alpha = -2$, $\int_{-1}^{-2} f(t)\,dt = e$.

Ce calcul ne correspond pas à un calcul d'aire $-1 > -2$ et donc $\int_{-2}^{-1} f(t)\,dt = -e \leqslant 0$.

122 **a)** $\mu = \frac{1}{10}\int_0^{10} N(t)\,dt$

$$\mu = \frac{1}{10}\left[10t^3 - \frac{1}{4}t^4\right]_0^{10} = 750$$

Le nombre moyen de bovins malades durant les dix premiers jours est 750.

b) $N'(t) = 60t - 3t^2 = 3t(20-t)$

t	0		20		30
$N'(t)$		+	0	−	
N	0	↗	4 000	↘	0

$20 - t \geqslant 0$

$t \leqslant 20$

$$\frac{1}{10}\int_{15}^{25} N(t)\,dt = \frac{1}{10}\left[10t^3 - \frac{1}{4}t^4\right]_{15}^{25} = 3\,750$$

123 **1. a)** On peut conjecturer que :

• $f(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;2{,}7]$ et $f(x) \leqslant 0$ sur $[2{,}7\,;+\infty[$.

• f croissante sur $[0\,;1]$, décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

b) Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $x \geqslant 0$.

$1 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant e$.

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln x$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	

• f dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = 1 - \ln x - x \times \frac{1}{x} = -\ln x.$$

$-\ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1.$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖	$\nearrow$	1	$\searrow$	

2. a) $a < \mathrm{e}$. f est positive et continue sur $[0\,;\mathrm{e}]$ donc :

$$\mathscr{A}(a) = \int_a^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$a > \mathrm{e}$. f est négative et continue sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$ donc :
$\mathscr{A}(a) = \int_{\mathrm{e}}^{a} (-f(x))\,\mathrm{d}x$ c'est-à-dire :

$$\mathscr{A}(a) = -\int_{\mathrm{e}}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) La fonction $x \mapsto \int_1^x t \ln t\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée $x \mapsto x \ln x$ et s'annule en 1.

$x \mapsto \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}$ a pour dérivée

$x \mapsto x \ln x + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$, c'est-à-dire $x \mapsto x \ln x$.

De plus, elle s'annule en 1 donc :

$$\int_1^x t \ln t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

c) $\mathscr{A}(a) = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\right]_a^{\mathrm{e}}$

$$\mathscr{A}(a) = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4} - \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\mathscr{A}(a) = \frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{a^2}{4}$$

d) $\mathscr{A}(a) = \frac{\mathrm{e}^2}{4} \Leftrightarrow -\frac{a^2}{2}\ln a + \frac{a^2}{4} = 0$

$\Leftrightarrow a^2(-2\ln a + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \ln a = \frac{1}{2}$ car $a > 0$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{\mathrm{e}}.$

124 **a)** f est continue sur $[a\,;b]$, donc f admet un minimum m sur $[a\,;b]$.
f est croissante sur $[a\,;b]$ donc ce minimum est $m = f(a)$.
b) Pour tout $x \in [a\,;b]$, $g(x) = f(x) - m$.
Or le minimum de f est m donc pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \geqslant m$ donc $g(x) \geqslant 0$.
g est continue sur $[a\,;b]$ comme somme de fonctions continues sur $[a\,;b]$.
c) g est une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$, donc elle admet des primitives sur $[a\,;b]$ en particulier
$\mathrm{G} : x \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x) + mx$ est donc une primitive de f sur $[a\,;b]$, donc f admet des primitives sur $[a\,;b]$.

2. a) f est dérivable sur $\left[-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$ et on a :

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \cos x - \sin x\,\mathrm{e}^x = (\cos x - \sin x)\mathrm{e}^x.$$

b) Pour tout $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\cos x - \sin x$.

Or $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Pour tout $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x + \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ d'où $f'(x) \geqslant 0$.

f est donc croissante sur $\left[-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

c) f est croissante sur $\left[-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$ donc d'après la question de cours, f admet des primitives sur $\left[-\frac{3\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

d) $\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{2}(-\sin x + \cos x)\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)\mathrm{e}^x$

$\mathrm{F}'(x) = \cos x\,\mathrm{e}^x.$

125 L'élève n'a pas vérifié si f est positive sur $[1\,;5]$.
En effet sur $[1\,;2]$, $f(x) \leqslant 0$ et sur $[2\,;5]$, $f(x) \geqslant 0$

$$\mathscr{A} = \int_1^2 (-f(x)\,\mathrm{d}x) + \int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\mathscr{A} = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2+4x}\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2+4x}\right]_2^5$$

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^4 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-5} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^4$$

$$\mathscr{A} = \mathrm{e}^4 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-5}$$

126 Il ne peut rien conjecturer car on ne connaît pas les u.a.
Par contre si f, g et h sont les fonctions associées aux domaines rose, violet et vert, on peut écrire :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$$

127 On peut conjecturer que les aires comprises d'une part entre $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, d'autre part $\mathscr{C}_g$ l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ sont égales.
$f(x) = -x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2$ et $g(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^6}{6} + \frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{60}$$

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{6} - \frac{2}{5}x^5 + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{60}$$