La Réunion septembre 2010

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les plans P et Q d'équations respectives : $x + y + z = 0$ et $2x + 3y + z - 4 = 0$.

1. Montrer que l'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$ où t est un nombre réel.

2. Soit λ un nombre réel. On considère le plan P_λ d'équation : $(1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$.

a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1 + \lambda ; 1 + 2\lambda ; 1)$ est un vecteur normal du plan P_λ.

b. Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans P et P_λ sont confondus.

c. Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans P et P_λ sont perpendiculaires ?

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D′, intersection des plans P et P_{-1}.
Montrer que les droites D et D′ sont confondues.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère le point A(1 ; 1 ; 1). Déterminer la distance du point A à la droite D, c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite D.

EXERCICE 2 4 points
Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, le numéro de la question et la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse est exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

Dans une fête foraine, Luc décide de participer à un jeu qui se déroule de la manière suivante :
Luc tire au hasard un jeton dans une urne contenant quatre jetons rouges et deux jetons bleus.

• Si le jeton tiré est bleu. Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne le premier jeton tiré, il tire au hasard un deuxième jeton dans l'urne.
• Si le deuxième jeton tiré est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, sans remettre dans l'urne les deux jetons précédents, il tire au hasard un troisième jeton dans l'urne.
• Si le troisième jeton est bleu, Luc gagne et le jeu s'arrête ; sinon, le jeu s'arrête et Luc a perdu.

1. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du deuxième tirage est :

$\frac{19}{15}$ $\qquad$ $\frac{2}{5}$ $\qquad$ $\frac{11}{15}$ $\qquad$ $\frac{4}{15}$

2. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du troisième tirage est :

$\frac{1}{5}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{2}{15}$ $\qquad$ $\frac{1}{9}$

3. La probabilité que Luc gagne à ce jeu après avoir effectué au moins deux tirages est :

$\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{4}{15}$ $\qquad$ $\frac{7}{15}$ $\qquad$ $\frac{1}{3}$

4. La probabilité que Luc gagne à ce jeu, sachant qu'il a obtenu un jeton rouge au premier tirage est :

$\frac{7}{10}$ $\qquad$ $\frac{7}{15}$ $\qquad$ $\frac{11}{15}$ $\qquad$ $\frac{5}{9}$

EXERCICE 3 6 points Commun à tous les candidats

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1$.

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f_k en 0.

2. On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$. En déduire la limite de la fonction f_k en $+\infty$.

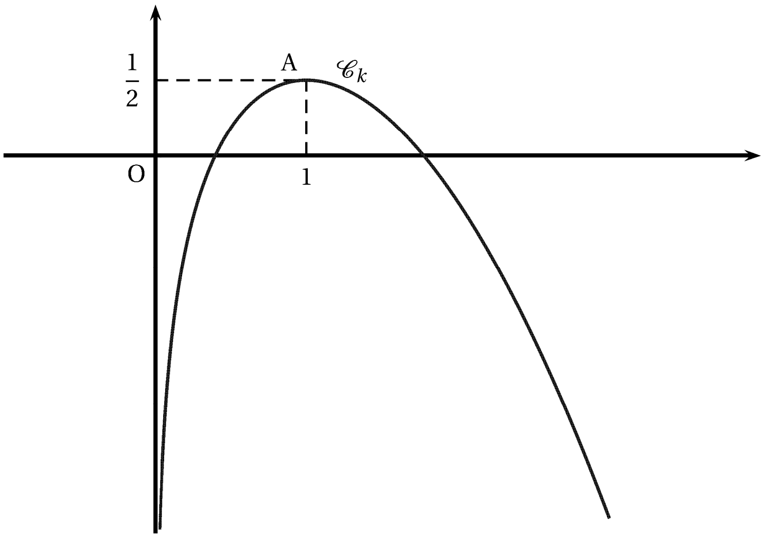
3. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f'_k(x) = \frac{1 - 2kx^2}{x}$.

4. Pour un nombre réel k strictement positif : on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
f_k	$\Vert$	$\nearrow$	$\frac{1 - \ln(2k)}{2}$	$\searrow$	

Justifier les renseignements sur les variations de la fonction f_k figurant dans ce tableau.

5. On a tracé ci-dessous la courbe C_k représentative d'une fonction f_k pour une certaine valeur du nombre réel k strictement positif. Le point $A\left(1\,;\,\frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_k. Quelle est la valeur du nombre réel k correspondant ? Justifier la démarche.



Partie B

Dans cette partie on pose $k = \frac{1}{2}$.

1. Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra utiliser une intégration par parties.

2. Calculer, en unité d'aire, la mesure de l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$; unité graphique : 8 centimètres.

On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1 + \mathrm{i})\,z$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f.

2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.On note z_n l'affixe du point M_n.

a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3n\pi}{4}}$.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient n et p deux entiers naturels. À quelle condition sur n et p les points M_n et M_p sont-ils alignés avec l'origine O du repère ?

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$; unité graphique : 4 centimètres.

On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \mathrm{i})\,z$.

1. Montrer que la transformation f est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

2. On définit la suite de points (M_n) de la façon suivante : M_0 est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

a. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3n\pi}{4}}$.

b. Construire les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

c. Montrer que pour tout nombre entier naturel n, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Prouver que les triangles M_0, M_1, M_2 et M_7 M_0 et M_1 ont la même aire. Préciser la valeur exacte de cette aire.

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

On considère les plans P et Q d'équations respectives : $x + y + z = 0$ et $2x + 3y + z - 4 = 0$.

1. Soit $\overrightarrow{n_P}$ le vecteur de coordonnées (1 ; 1 ; 1) normal au plan P et $\overrightarrow{n_Q}$ le vecteur de coordonnées (2 ; 3 ; 1) normal au plan Q, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans P et Q ne sont pas parallèles, ils se coupent suivant une droite.

Soit M un point quelconque de D, il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$

Pour un tel point M, $x + y + z = -4 - 2t + 4 + t + t = 0$ donc $M \in P$

$2x + 3y + z - 4 = 2(-4 - 2t) + 3(4 + t) + t - 4 = -8 - 4t + 12 + 3t + t - 4 = 0$ donc $M \in Q$

donc l'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$ où t est un nombre réel.

2. *a.* $(1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda + 2\lambda)x + (1 - \lambda + 3\lambda)y + (1 - \lambda + \lambda)z - 4\lambda = 0$

donc le plan P_λ a pour équation : $(1 + \lambda)x + (1 + 2\lambda)y + z - 4\lambda = 0$ donc le vecteur $\vec{n}(1 + \lambda ; 1 + 2\lambda ; 1)$ est un vecteur normal du plan P_λ.

b. Si $\lambda = 0$ alors P_0 a pour équation $x + y + z = 0$ donc les plans P_0 et P sont confondus.

c. $\overrightarrow{n_P}$ le vecteur de coordonnées (1 ; 1 ; 1) est normal au plan P ; le vecteur $\vec{n}(1 + \lambda ; 1 + 2\lambda ; 1)$ est un vecteur normal du plan P_λ.

$\overrightarrow{n_P}.\vec{n} = 1 + \lambda + 1 + 2\lambda + 1 = 3 + 3\lambda$ donc si $\lambda = -1$ alors $\overrightarrow{n_P}.\vec{n} = 0$ donc, si $\lambda = -1$, les plans P et P_λ sont perpendiculaires.

3. P_{-1} a pour équation $-y + z + 4 = 0$ donc $y = z + 4$, si $M \in P \cap P_{-1}$ alors $x + y + z = 0$ donc $x = -4 - 2z$

donc une représentation paramétrique de la droite D′, intersection des plans P et P_{-1} est $\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$. Les droites D et D′ sont confondues.

4. Soit A' le projeté orthogonal de A sur la droite D.

Il existe un réel t tel que A' ait pour coordonnées $(-4 - 2t ; 4 + t ; t)$. $\overrightarrow{AA'}$ a pour coordonnées $(-5 - 2t ; 3 + t ; t - 1)$.

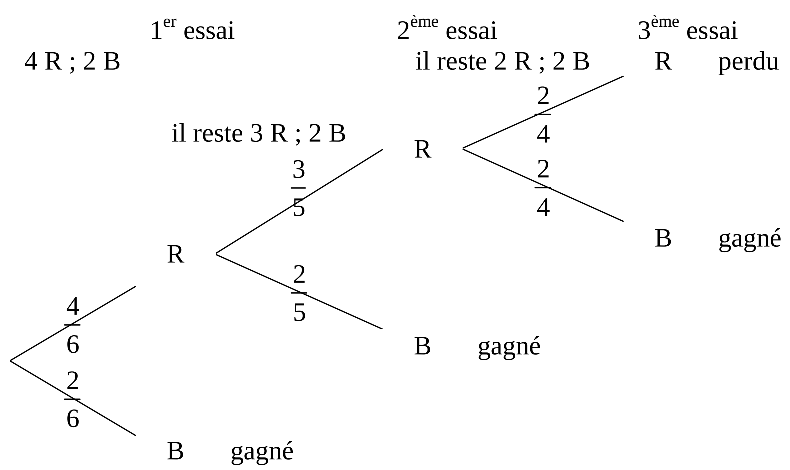
Un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(-2 ; 1 ; 1)$ donc $\overrightarrow{AA'}$ est orthogonal à $\vec{u}$ donc $\overrightarrow{AA'}.\vec{u} = 0$ donc $-2(-5 - 2t) + 3 + t + t - 1 = 0$

donc $10 + 4t + 2 + 2t = 0$ soit $6t + 12 = 0$ donc $t = -2$.

$\overrightarrow{AA'}$ a pour coordonnées $(-1 ; 1 ; -3)$ donc $AA'^2 = 1 + 1 + 9$ donc $AA' = \sqrt{11}$

EXERCICE 2 4 points Commun à tous les candidats

On peut représenter le jeu par un arbre de choix :



1. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du deuxième tirage est : $p(R_1 \cap B_2) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{15}$

2. La probabilité que Luc gagne à ce jeu à l'issue du troisième tirage est : $p(R_1 \cap R_2 \cap B_3) = \frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

3. La probabilité que Luc gagne à ce jeu après avoir effectué au moins deux tirages est :

$p(R_1 \cap B_2) + p(R_1 \cap R_2 \cap B_3) = \frac{4}{15}+\frac{1}{5} = \frac{7}{15}$

4. La probabilité que Luc gagne après avoir effectué au moins deux tirages est $\frac{7}{15}$

La probabilité que Luc gagne est : $\frac{7}{15} + \frac{1}{3} = \frac{12}{15}=\frac{4}{5}$

La probabilité que Luc gagne à ce jeu, sachant qu'il a obtenu un jeton rouge au premier tirage est : $\dfrac{\frac{7}{15}}{\frac{4}{5}}=\frac{7}{15}\times\frac{5}{4}=\frac{7}{12}$

EXERCICE 3 6 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} -k x^2 + 1 = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_k(x) = -\infty$

2. $\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$.

$f_k(x) = \ln(x) - k x^2 + 1 = x^2\left(\frac{\ln x}{x^2} - k\right)+1$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2} - k\right) = -k$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

$k > 0$, $-k < 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{\ln x}{x^2} - k\right)+1 = -\infty$ soit $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = -\infty$.

3. Pour tout nombre réel x strictement positif, $f'_k(x) = \frac{1}{x} - 2kx = \frac{1-2kx^2}{x}$.

4. $x > 0$ donc $f'_k(x)$ a le même signe que $1 - 2kx^2$ or puisque $k > 0$, $1 - 2kx^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2k}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{2k}}$

donc $1 - 2kx^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2k}} < x < \frac{1}{\sqrt{2k}}$

donc f_k est strictement croissante sur $\left]0\,;\frac{1}{\sqrt{2k}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2k}}\,;+\infty\right[$.

Si $a > 0$ alors $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ et $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$ donc $f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(2k) - k\times\frac{1}{2k} + 1 = -\frac{1}{2}\ln(2k) - \frac{1}{2} + 1$

$f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(2k) + \frac{1}{2} = \frac{1-\ln(2k)}{2}$

5. La courbe admet un maximum pour $x = 1$ donc lorsque $\frac{1}{\sqrt{2k}} = 1$ soit $\sqrt{2k} = 1 \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

Partie B

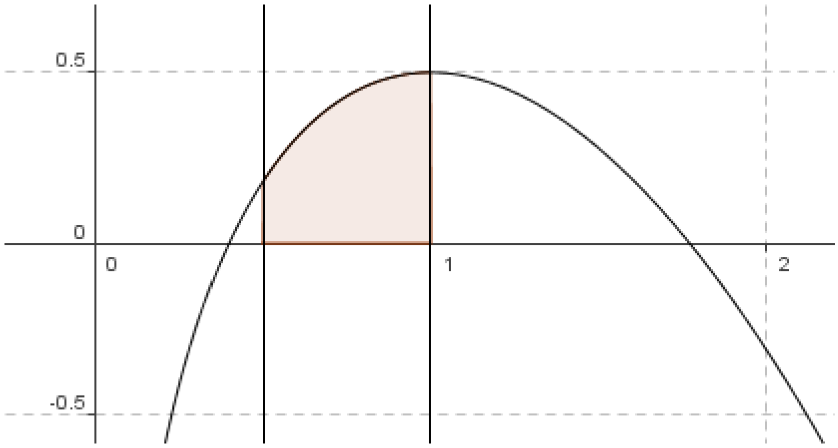
1. Soit $\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{cases}$ donc $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x = [x \ln x]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2 - \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln 2 - \left[1-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$

2. La fonction $f_{\frac{1}{2}}$ est continue positive sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ donc la mesure de l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$ est $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x\,\mathrm{d}x - 0{,}5\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} - 0{,}5\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{7}{48}$$

soit environ 0,2 *u.a.*



EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la transformation *f* du plan qui à tout point *M* d'affixe *z* associe le point *M'* d'affixe *z'* telle que $z' = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1 + \mathrm{i})\,z$.

1. L'expression complexe de *f* est de la forme $z' = a\,z + b$ avec *a* complexe non nul donc *f* est une similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$ soit de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et de centre O.

2. *a.* La suite z_n est une suite géométrique de premier terme $z_0 = 1$, de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{4}(-1 + \mathrm{i}) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

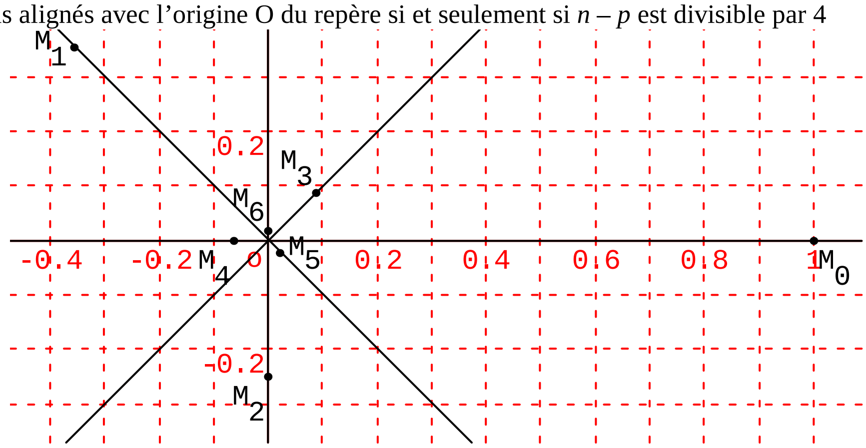
donc pour tout nombre entier naturel *n*, $z_n = z_0\, q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3n\pi}{4}}$.

3. Les points O, M_n et M_p sont alignés si et seulement si $\arg\frac{z_n}{z_p} = k\pi$ avec $k \in$ ↗

il faut donc que $\frac{3n\pi}{4} - \frac{3p\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow 3n - 3p = 4k$

donc *k* est divisible par 3 donc il existe un entier relatif *q* tel que $k = 3q$ donc $n - p = 4q$

les points M_n et M_p sont-ils alignés avec l'origine O du repère si et seulement si $n - p$ est divisible par 4



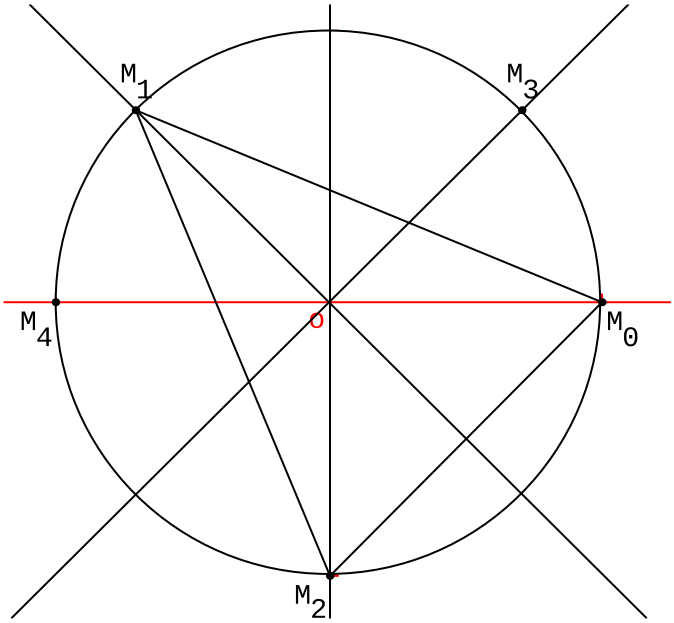
EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ donc $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} z$ donc *f* est la rotation de centre O d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

2. *a.* La suite z_n est une suite géométrique de premier terme $z_0 = 1$, de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \mathrm{i}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

donc pour tout nombre entier naturel n, $z_n = z_0 q^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3n\pi}{4}}$.

b.



c. M_{n+8} est le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3(n+8)\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3n\pi}{4}+\mathrm{i}6\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3n\pi}{4}}$ donc pour tout nombre entier naturel n, les points M_n et M_{n+8} sont confondus.

3. Une rotation conserve les longueurs, les angles et les aires ; $f(M_0) = M_1$; $f(M_1) = M_2$ et $f(M_2) = M_3$ donc les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_1M_2M_3$ ont la même aire.
de même les triangles $M_1M_2M_3$ et $M_2M_3M_4$ ont la même aire etc. jusqu'au triangle $M_7M_8M_9$
or $M_8 = M_0$ et $M_9 = M_1$ donc le triangle $M_7M_8M_9$ est aussi le triangle $M_7M_0M_1$
donc les triangles M_0, M_1, M_2 et $M_7M_0M_1$ ont la même aire.

$$M_0M_1 = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} - 1\right|$$

$$M_2M_1 = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\times 2\pi}{4}}\right| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right)\right| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} - 1\right| = M_0M_1$$

Le triangle $M_0M_1M_2$ est isocèle en M_1 donc l'aire du triangle $M_0M_1M_2$ est égale à $\frac{1}{2}\, M_1H \times M_0M_2$ où H est le pied de la hauteur issue de M_1 dans ce triangle donc H est aussi le milieu de $[M_0M_2]$

M_0 a pour affixe 1 et M_2 a pour affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\times 2\pi}{4}} = -\mathrm{i}$ donc H est le point d'affixe $\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$

M_1 est le point d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i})$ donc

$$M_1H = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i}) - \frac{1}{2}(1-\mathrm{i})\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i}) + \frac{1}{2}(-1+\mathrm{i})\right| = \frac{\sqrt{2}+1}{2}\,|-1+\mathrm{i}| = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

$M_0M_2 = |1-\mathrm{i}| = \sqrt{2}$

l'aire du triangle $M_0M_1M_2$ est égale à $\frac{1}{2}\, M_1H \times M_0M_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$