Dans le plan P, on considère un cercle C, de centre O et de rayon R ; [IJ] est un diamètre de cercle.

1. Montrer que, pour tout point M du plan, on a $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = MO^2 - R^2$

On constate alors que le produit scalaire $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}$ est indépendant du diamètre [IJ] choisi. Ce nombre est appelé « puissance du point M par rapport au cercle C »
On définie ainsi la fonction :

$$f : P \rightarrow \mathbb{R}$$
$$M \rightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}$$

2. Construire l'ensemble des points M du plan dans chacun des cas suivants :
a. $f(M) = 0$;
b. $f(M) = -R^2$;
c. $f(M) = -\frac{3}{4}R^2$

3. On trace par le point M une droite qui coupe le cercle C en deux points A et B.
Démontrer que $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

4. Etudier le signe de $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}$ suivant la position de M par rapport à C.

CORRECTION

1. $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OI}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OJ})$

[IJ] est un diamètre de cercle donc O est le milieu de [IJ] donc $\overrightarrow{OJ} = -\overrightarrow{OI}$ et $OI = OJ = R$

$\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OI}).(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OI})$ donc $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = MO^2 - OI^2$ or $OI = R$ donc $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = MO^2 - R^2$.

2. *a.* Si $f(M) = 0$ alors $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$ donc $MO^2 - R^2 = 0$ soit $MO^2 = R^2$ donc $MO = R$
L'ensemble des points du plan tels que $f(M) = 0$ est le cercle de centre O de rayon R (en noir sur la figure).

2. *b.* Si $f(M) = -R^2$ alors $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = -R^2$ donc $MO^2 - R^2 = -R^2$ soit $MO^2 = 0$ donc $MO = 0$ donc $M = O$
L'ensemble des points du plan tels que $f(M) = -R^2$ est le point O (en rouge sur la figure).

2. *c.* $f(M) = -\frac{3}{4}R^2$ alors $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = -\frac{3}{4}R^2$ donc $MO^2 - R^2 = -\frac{3}{4}R^2$

$MO^2 = R^2 - \frac{3}{4}R^2$ donc $MO^2 = \frac{1}{4}R^2$ donc $MO = \frac{1}{2}R$.

L'ensemble des points du plan tels que $f(M) = 0$ est le cercle de centre O de rayon $\frac{1}{2}R$ (en bleu sur la figure).

3. Soit K le milieu de [AB], la droite (OK) est la médiatrice du segment [AB] donc les triangles MKO et AKO sont rectangles en K.
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}).(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KB}) = (\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}).(\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{KA}) = MK^2 - AK^2$
Le triangle MKO est rectangle en K donc $MO^2 = OK^2 + KM^2$ donc $KM^2 = OM^2 - OK^2$
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - OK^2 - AK^2 = OM^2 - (OK^2 + AK^2)$
Le triangle AKO est rectangle en K donc $OK^2 + AK^2 = OA^2 = R^2$ donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2$ donc $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

4. $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = OM^2 - R^2$

Si le point M est sur le cercle C, $OM = R$ donc $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$

Si le point M est à l'intérieur du cercle C, $0 \leq OM < R$ donc $OM^2 < R^2$ et $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} < 0$

Si le point M est à l'extérieur du cercle C, $OM > R$ donc $OM^2 > R^2$ et $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} > 0$