Asie juin 2009

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$.

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g.

a. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b. En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.

c. Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ est solution de l'équation $x + \ln x = 0$ si et seulement si $g(x) = x$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \le u_n \le u_{n+1} \le 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

3. Recherche d'une valeur approchée de α

a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à la sixième décimale.

b. On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.

En déduire un encadrement de α sous la forme $u \le \alpha \le v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

CORRECTION

1. *a.* $g'(x) = \dfrac{1}{5}\left(4 - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{4x - 1}{5x}$

donc sur $\left[0 ; \dfrac{1}{4}\right]$, $g'(x) \ge 0$ et g est croissante sur $\left[0 ; \dfrac{1}{4}\right]$

sur $\left[\dfrac{1}{4} ; +\infty\right[$, $g'(x) \le 0$ et g est décroissante sur $\left[\dfrac{1}{4} ; +\infty\right[$.

b. g est décroissante sur $\left[\dfrac{1}{4} ; +\infty\right[$ donc pour tout x de $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \le g(x) \le g(1)$ soit $0{,}5 \le g\left(\dfrac{1}{2}\right) \le g(x) \le 0{,}8$

pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.

c. un nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ est solution de l'équation $g(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{4x - \ln x}{5} = x$

$\Leftrightarrow 5x = 4x - \ln x \Leftrightarrow 5x - 4x + \ln x = 0 \Leftrightarrow x + \ln x = 0$

2. *a.* $u_0 = 0{,}5$, $u_1 = g(u_0)$

or $u_0 \in \left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$ donc $g(u_0) \in \left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$ donc $\dfrac{1}{2} \le u_0 < u_1 \le 1$

La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$; si $\dfrac{1}{2} \le u_n \le u_{n+1} \le 1$ alors $\dfrac{1}{2} \le u_{n+1} < u_{n+2} \le 1$

g est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$

$\dfrac{1}{2} \le u_n < u_{n+1} \le 1$ donc $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \le g(u_n) < g(u_{n+1}) \le g(1)$

or $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = u_1$ donc $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \ge \dfrac{1}{2}$

$g(1) = \dfrac{4}{5}$ donc $g(1) \le 1$

donc $\dfrac{1}{2} \le g\left(\dfrac{1}{2}\right) \le u_{n+1} < u_{n+2} \le g(1) \le 1$

donc $\dfrac{1}{2} \le u_{n+1} < u_{n+2} \le 1$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$

b. La suite (u_n) est croissante majorée par 1 donc est convergente.

Pour tout n de N, $u_n \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, $u_{n+1} = g(u_n)$ et g est continue sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ donc la limite de (u_n) est solution de $g(x) = x$

3. *a.* $u_{10} \approx 0,567124$
Avec une Casio Graph 25, taper

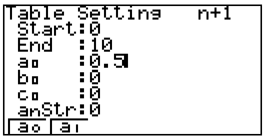
1 ÷ 2	EXE	on obtient u_0
(4*Ans – ln Ans)/5	EXE	on obtient u_1
	EXE	on obtient u_2

Répéter autant de fois que nécessaire pour obtenir u_{10}

Avec une CASIO Graph 35 ou supérieur :
On peut procéder comme ci-dessus ou aller dans le menu RECUR

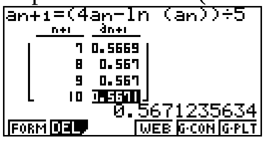
Taper la formule de la suite :
$a_{n+1} = (4\,a_n - \ln a_n) \div 5$
(a_n s’obtient à partir du menu $n\ a_n$)

Ensuite taper RANG



Start indique le premier autorisé pour n
End le dernier rang souhaité pour n
a_0 indique la première valeur de u_0 donc 0,5

Le reste ne sert que si l’on a défini plusieurs suites.
Taper 2 fois EXE (une fois pour sortir du menu une fois pour avoir la table)



Avec les flèches de direction, aller dans la deuxième colonne, la valeur de u_{10} avec 10 décimales est affichée en bas de l’écran.

b. u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α donc $u_{10} \leq \alpha \leq u_{10} + 5 \times 10^{-4}$
soit $0{,}567124 \leq \alpha \leq 0{,}567174$ donc $0{,}567 \leq \alpha \leq 0{,}568$