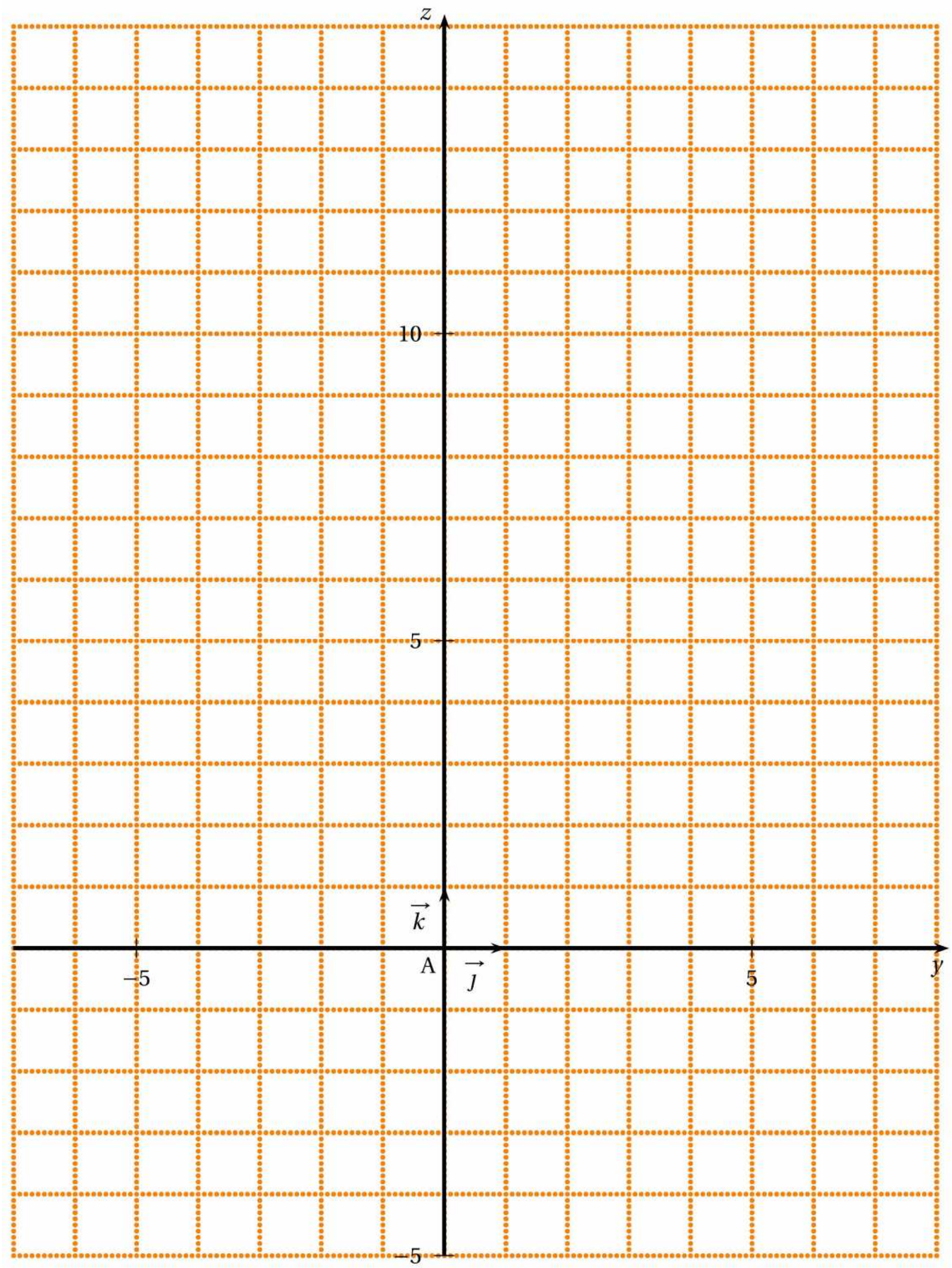
Antilles-Guyane septembre 2009
EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats
VRAI OUFAUX
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.
PARTIE A
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1. La suite (u_n) est bornée.
2. La suite (u_n) converge.
3. La suite de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ converge.
4. Toute suite (v_n) à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.
PARTIE B
1. Si A et B sont deux évènements indépendants avec $P(B) \neq 0$ et $P(B) \neq 1$, alors $P(A \cap B) = P_B(A)$.
2. Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0 ; 1]$, alors $P(X \in [0{,}1 ; 0{,}6]) = 0{,}6$.
3. Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et $\dfrac{1}{3}$, alors $P(X \geq 1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$.

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité
L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points : A(1 ; – 1 ; 4), B(7 ; – 1 ; – 2) et C(1 ; 5 ; – 2).
1. a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
c. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1 ; 1 ; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
d. En déduire que $x + y + z - 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soit D la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2 \\ z = -2t - 3 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.
a. Montrer que la droite D est perpendiculaire au plan (ABC).
b. Montrer que les coordonnées du point G, intersection de la droite D et du plan (ABC) sont (3 ; 1 ; 0).
c. Montrer que G est l'isobarycentre des points A, B et C.
3. Soit S la sphère de centre G passant par A.
a. Donner une équation cartésienne de la sphère S .
b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection E et F, de la droite D et de la sphère S .

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité
L'annexe est à rendre avec la copie
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère la surface S_1 d'équation $z = x^2 + y^2$, et la surface S_2 d'équation $z = xy + 2x$.
PARTIE A
On note P le plan d'équation $x = 2$, E_1 l'intersection de la surface S_1 et du plan P et E_2 l'intersection de la surface S_2 et du plan P .
En **annexe**, le plan P est représenté muni du repère $(A ; \vec{j}, \vec{k})$ où A est le point de coordonnées (2 ; 0 ; 0).
1. a. Déterminer la nature de l'ensemble E_1.
b. Déterminer la nature de l'ensemble E_2.
2. a. Représenter les ensembles E_1 et E_2 sur la feuille **annexe**.
b. Dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ donner les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles E_1 et E_2.
PARTIE B
On pourra utiliser sans démonstration la propriété suivante : « soient a, b et c des entiers avec a premier. Si a divise b c alors a divise b ou a divise c. »
L'objectif de cette partie est de déterminer les points d'intersection $M(x ; y ; z)$ des surfaces S_1 et S_2.où y et z sont des entiers relatifs et x un nombre premier. On considère un tel point $M(x ; y ; z)$.
1. a. Montrer que $y(y - x) = x(2 - x)$.
b. En déduire que le nombre premier x divise y.
2. On pose $y = kx$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
a. Montrer que x divise 2, puis que $x = 2$.
b. En déduire les valeurs possibles de k.
3. Déterminer les coordonnées possibles de M et comparer les résultats avec ceux de la PARTIE A, question 2. b.

ANNEXE
Exercice 2
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité
À rendre avec la copie



EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -11 + 4i$, $z_B = -3 - 4i$ et $z_C = 5 + 4i$.

2. Calculer le module et un argument du quotient $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

3. Soit E l'image du point C par la rotation R de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

Montrer que l'affixe de E vérifie $z_E = -3 + (8\sqrt{2} - 4)i$. Placer le point E.

4. Soit D l'image du point E par l'homothétie H de centre B et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Placer le point D .

5. **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**

Soit D la droite parallèle à la droite (EC) passant par le point D. On note F le point d'intersection de la droite D et de la droite (BC), I le milieu du segment [EC] et J le milieu du segment [DF]. Montrer que B, I et J sont alignés.

EXERCICE 4 6 points Commun à tous les candidats

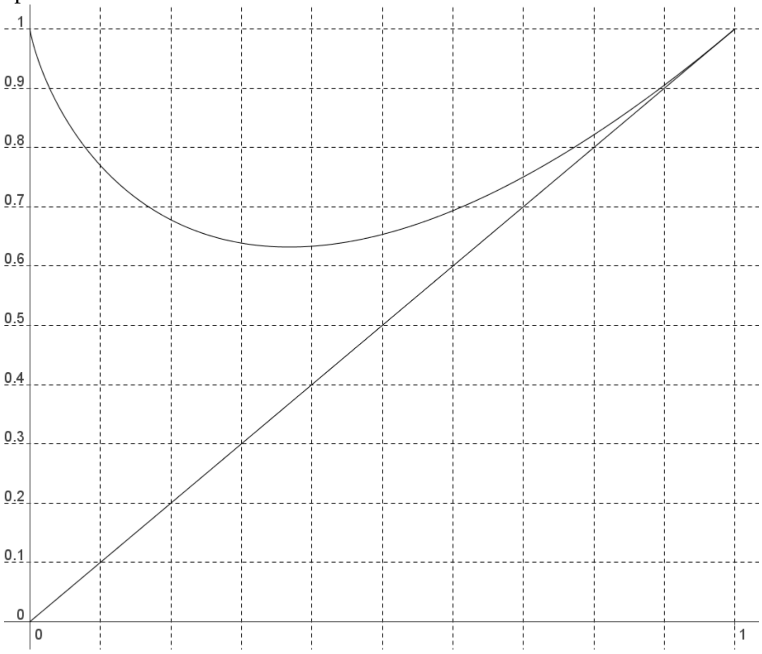
Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0 ; 1]$ par : $f(x) = 1 + x \ln x$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

C est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

T est la droite d'équation $y = x$.

La courbe C et la droite T sont représentées sur le schéma ci-dessous.



1. a. Justifier que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

b. En utilisant le signe de $x \ln x$ sur $]0 ; 1]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in\ ]0 ; 1]$, on a $f(x) \leq 1$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in\ ]0 ; 1]$.

b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in\ ]0 ; 1]$ par $g(x) = 1 + x \ln x - x$.

a. Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0 ; 1]$ et dresser le tableau de variation de g .

On ne cherchera pas la limite de g en 0.

b. En déduire les positions relatives de la courbe C et de la droite T .

4. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On pose $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} [1 - f(x)]\, dx$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2} \ln \alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4}$.

b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0} I(\alpha)$.

c. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

d. À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe C , la droite T et l'axe des ordonnées.

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. **VRAI** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc la suite (u_n) est bornée.

2. **FAUX,** Si n est pair alors $(-1)^n = 1$ et si n est pair alors $(-1)^n = -1$ donc **l**a suite (u_n) ne converge pas.

3. **VRAI** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{-1}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{1}{n}$, or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$.

La suite de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge vers 0

4. **FAUX.** Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = 2 - \frac{1}{n}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $v_n > 0$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)}$ donc (v_n) est décroissante et pourtant $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$

PARTIE B

1. **FAUX** Si A et B sont deux évènements indépendants alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$, or $P(B) \neq 1$ donc $P(A \cap B) \neq P_B(A)$.

2. **FAUX** Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [0 ; 1], alors $P(X \in [0,1 ; 0,6]) = 0,6 - 0,1 = 0,5$

3. **VRAI** Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et $\frac{1}{3}$, alors $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{100}$.

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. *a.* les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont (6 ; 0 ; – 6) ; (0 ; – 6 ; – 6) et (– 6 ; 6 ; 0)

b. $AB^2 = AC^2 = BC^2 = 6^2 + 6^2 = 36$ donc le triangle ABC est équilatéral.

c. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 - 6 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 - 6 = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires du plan (ABC), donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).

d. $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC) donc le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

soit $(x - 1) + (y + 1) + (z - 4) = 0$ donc $x + y + z - 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2. *a.* Un vecteur directeur de D est le vecteur de coordonnées (– 2 ; – 2 ; – 2) qui colinéaire à $\vec{n}$, or $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC) donc la droite D est perpendiculaire au plan (ABC).

b. Le point G, intersection de la droite D et du plan (ABC) *a* des coordonnées vérifiant $\begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2 \\ z = -2t - 3 \end{cases}$ et $x + y + z - 4 = 0$

donc $-2t - 2t - 2 - 2t - 3 - 4 = 0$ soit $-6t - 9 = 0$ donc $-2t = 3$ donc les coordonnées de G sont (3 ; 1 ; 0).

c. L'isobarycentre des points A, B et C est le point de coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3} ; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$ soit (3 ; 1 ; 0) donc le point G est l'isobarycentre des points A, B et C

3. Soit S la sphère de centre G passant par A.

a. Donner une équation cartésienne de la sphère S .

La sphère S est l'ensemble des points M tels que GM = GA donc $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 2^2 + 2^2 + 4^2$

une équation cartésienne de la sphère S est donc $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 24$

b. Les points d'intersection E et F, de la droite D et de la sphère S ont des coordonnées qui vérifient : $t \begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2 \\ z = -2t - 3 \end{cases}$ et

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 24$ soit $3(-2t - 3)^2 = 24$ donc $(2t + 3)^2 = 8$ soit $2t + 3 = 2\sqrt{2}$ ou $2t + 3 = -2\sqrt{2}$

soit $t_1 = \frac{-3}{2} + \sqrt{2}$ ou $t_2 = \frac{-3}{2} - \sqrt{2}$

donc E a pour coordonnées $(3 + 2\sqrt{2} ; 1 + 2\sqrt{2} ; 2\sqrt{2})$ et F a pour coordonnées $(3 - 2\sqrt{2} ; 1 - 2\sqrt{2} ; -2\sqrt{2})$

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

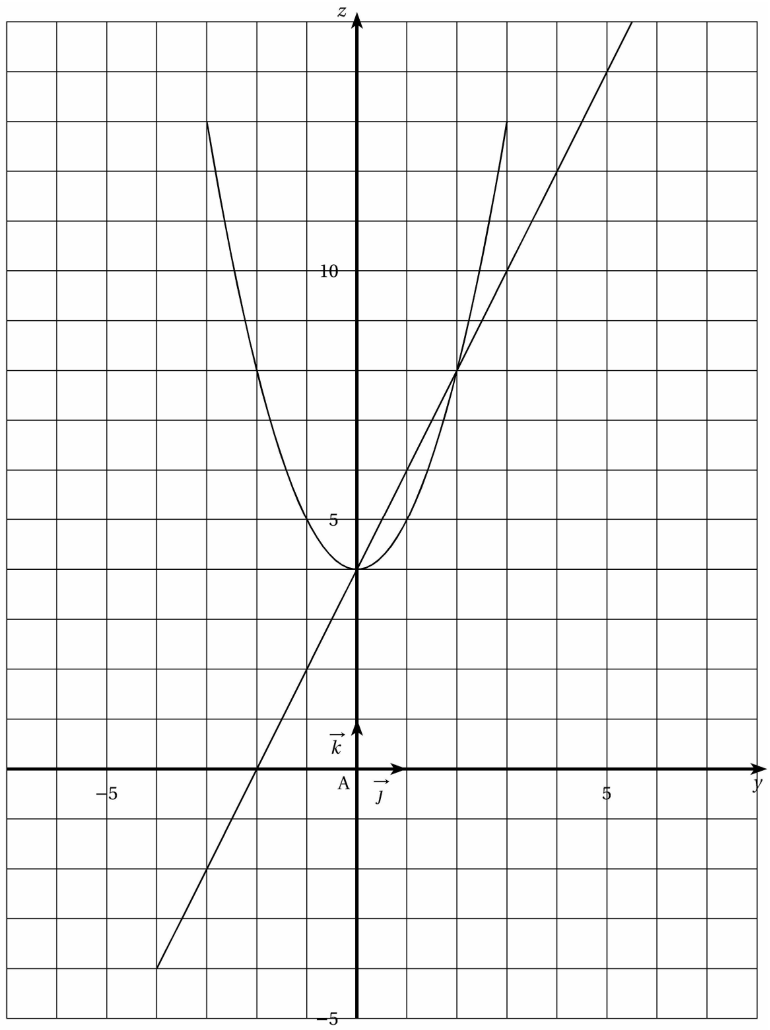
1. *a.* E_1 est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que : $\begin{cases} x=2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=4+y^2 \end{cases}$.

Dans le plan P , $z = y^2 + 4$ est l'équation d'une parabole.

b. E_2 est l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que : $\begin{cases} x=2 \\ z=x\,y+2\,x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=2\,y+4 \end{cases}$.

Dans le plan P , $z = 2\,y + 4$ est l'équation d'une droite.

2. *a.*



b. Les coordonnées des points d'intersection B et C des ensembles E_1 et E_2 vérifient : $\begin{cases} x=2 \\ z=4+y^2 \\ z=2\,y+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=4+y^2 \\ y^2+4=2\,y+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=4+y^2 \\ y^2-2\,y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=4+y^2 \\ y=0 \text{ ou } y=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=4 \\ y=0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x=2 \\ z=8 \\ y=2 \end{cases}$

Donc B est le point de coordonnées (2 ; 0 ; 4) et C le point de coordonnées (2 ; 2 ; 8).

PARTIE B

1. *a.* $M \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} z=x\,y+2\,x \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=x\,y+2\,x \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-x\,y=2\,x-x^2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\,(y-x)=x\,(2-x) \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$

b. x est un nombre premier qui divise $y\,(y-x)$ donc x divise y ou x divise $y-x$.
si x divise $y-x$ comme x divise x alors x divise $(y-x)+x$ donc x divise y. Dans tous les cas, le nombre premier x divise y.

2. *a.* $y\,(y-x) = x\,(2-x)$ donc $k\,x^2\,(k-1) = x\,(2-x)$
x est un nombre premier donc $x \neq 0$, donc $k\,x\,(k-1) = 2-x$
x divise $2-x$ et x divise x donc x divise $(2-x)+x$ donc x divise 2
x est un nombre premier qui divise 2 donc $x = 2$.

b. $x = 2$ donc $k\,x\,(k-1) = 2-x$ devient : $2\,k\,(k-1) = 0$ donc soit $k = 0$ soit $k = 1$ donc soit $y = 0$ soit $y = 2$

3. Pour $k = 0$, on obtient comme coordonnées (2 ; 0 ; 4) qui sont les coordonnées du point B.
Pour $k = 1$, on obtient comme coordonnées (2 ; 2 ; 8) qui sont les coordonnées du point C.
Ainsi retrouve-t-on les résultats de la première partie, question 2.*b*.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

1.

2. $z_A - z_B = -8 + 8\,\mathrm{i} = 8\,(1 - \mathrm{i})$; $z_C - z_B = 8 + 8\,\mathrm{i} = 8\,(1 + \mathrm{i})$ donc $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \mathrm{i}$

donc le module de $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ est 1 et un argument du quotient $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ est $\dfrac{\pi}{2}$, donc $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{2}$ à 2π près donc le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

3. Soit E l'image du point C par la rotation R de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

L'écrire complexe de la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ est : $z' - z_B = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z - z_B)$, c'est-à-dire : $z' = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(z - z_B) + z_B$

E est l'image de C par cette rotation, donc : $z_E = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(z_C - z_B) + z_B$

$z_E = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(8 + 8\,\mathrm{i}) - 3 - 4\,\mathrm{i} \Leftrightarrow z_E = 4\sqrt{2}\,(1 + \mathrm{i})^2 - 3 - 4\,\mathrm{i} \Leftrightarrow z_E = 8\,\mathrm{i}\sqrt{2} - 3 - 4\,\mathrm{i} \Leftrightarrow z_E = -3 + \mathrm{i}\,(8\sqrt{2} - 4)$

4. L'écriture complexe de l'homothétie H est :

$z' - z_B = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(z - z_B)$, c'est-à-dire : $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(z - z_B) + z_B$

$z_D = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-3 + \mathrm{i}\,(8\sqrt{2} - 4) + 3 + 4\,\mathrm{i}) - 3 - 4\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow z_D = \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}(8\sqrt{2}) - 3 - 4\,\mathrm{i} \Leftrightarrow z_D = 8\,\mathrm{i} - 3 - 4\,\mathrm{i}$

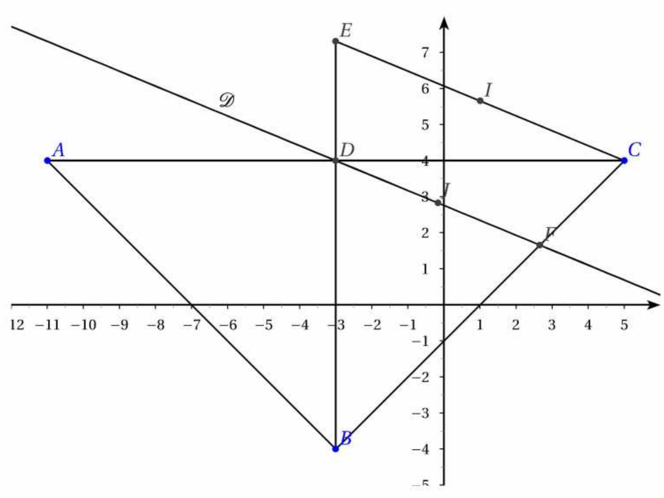
$\Leftrightarrow z_D = -3 + 4\,\mathrm{i}$

$(z_A + z_C) = -6 + 8\,\mathrm{i} = 2\,z_D$ donc $z_D = \dfrac{1}{2}(z_A + z_C)$ donc D est le milieu de [AC] ; or, ABC est un triangle rectangle en B.

Par conséquent, D est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle ABC, donc le centre de son cercle circonscrit.

5. Les droites (EC) et (DF) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès appliqué aux triangles BDF et BEC, $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{BD}{BF}$ donc F est l'image de C par l'homothétie H.

comme H transforme D en E et C en Fet qu'une homothétie conserve les milieux alors le milieu de [DC] est transformé par H en le milieu de [EF] donc H transforme I en J donc B, I, J sont alignés.



EXERCICE 4 6 points Commun à tous les candidats

1. *a.* $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

b. Si $0 < x \leq 1$ alors $\ln x \leq 0$ donc $x \ln x \leq 0$ sur $]0 ; 1]$, donc pour tout nombre réel $x \in]0 ; 1]$, on a $f(x) \leq 1$.

2. *a.* $f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x}$ soit $f'(x) = \ln x + 1$ pour tout nombre réel $x \in]0 ; 1]$.

b. $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$ donc une équation de tangente à la courbe C au point d'abscisse 1 est $y = x$

La droite T est tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

3. *a.* g est la somme de fonctions dérivables sur $]0 ; 1]$ donc g est dérivable sur $]0 ; 1]$

$g'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

x	0		1
$g'(x)$	‖	$-$	
g	‖ 1	↘	0

b. Pout tout x de $]0 ; 1]$, $g(x) \geq 0$ donc la courbe C est au dessus de la droite T sur $]0 ; 1]$.

4. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On pose $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} [1 - f(x)]\, \mathrm{d}x$.

a. $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} [1 - f(x)]\, \mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{1} -x \ln x \, \mathrm{d}x$

Soit $u'(x) = -x$ alors $u(x) = -\dfrac{x^2}{2}$

soit $v(x) = \ln x$ alors $v'(x) = \dfrac{1}{x}$ donc $\mathrm{I}(\alpha) = \left[-\dfrac{1}{2} x^2 \ln x\right]_{\alpha}^{1} - \displaystyle\int_{\alpha}^{1} -\dfrac{1}{2} x^2 \times \dfrac{1}{x}\, \mathrm{d}x$

$\mathrm{I}(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2} \ln \alpha + \displaystyle\int_{\alpha}^{1} \dfrac{1}{2} x \, \mathrm{d}x = \dfrac{\alpha^2}{2} \ln \alpha + \left[\dfrac{1}{4} x^2\right]_{\alpha}^{1}$ donc $I(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2} \ln \alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4}$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{1}{2} \alpha^2 \ln \alpha = 0$ donc $\lim\limits_{\alpha \to 0} I(\alpha) = \dfrac{1}{4}$

c. On en déduit que l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe C, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = 1$ est égale à $\dfrac{1}{4}$ unité d'aire (hachurée sur le dessin ci-dessous).

d. Pour calculer l'aire demandée, il faut calculer l'aire du triangle formé par la droite T, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = 1$; elle vaut $\dfrac{1}{2}$. On lui soustrait l'aire calculée précédemment : $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

L'aire du domaine (en gris sur le dessin ci-dessous) compris entre la courbe C, la droite T et l'axe des ordonnées vaut $\dfrac{1}{4}$ unité d'aire.