Soit f définie sur R par $f(x) = 3 + 2\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})\sqrt{3 - \cos x}$ et C sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que 2π est période de f
2. Prouver que, pour tout nombre réel x on a $-1 \leq f(x) \leq 1$
3. Montrer que f est paire
4. Quelles sont les conséquences graphiques de ces propriétés ?
5. Démontrer que f est dérivable sur R
6. On note f' la dérivée de f. Démontrer que pour tout x réel, $f'(x)$ est du signe $-\sin(x)$
7. Tracer f sur $[-2\pi ; 2\pi]$. Cette courbe rappelle-t-elle une courbe connue ?
8. Montrer que le coefficient directeur à C en $x = \frac{\pi}{2}$ est $\frac{-\sqrt{6} - 2\sqrt{3}}{6}$.
9. En déduire que f n'est pas la fonction cosinus.

10, Montrer pour tout de $[0 ; \pi]$, l'erreur effectuée en remplaçant $f(x)$ par $\cos(x)$ est inférieur à 0,09

Indications :

On étudie g définie sur $[0 ; \pi]$ par $g(x) = \cos(x) - f(x)$

Soit h défini sur $[0 ; \pi]$ par $h(x) = 2 + \sqrt{2} - 2\sqrt{3 - \cos x}$,

On démontrera qu'il existe dans $[0 ; \pi]$, un unique réel α tel que : $2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{3 - \cos \alpha}$

CORRECTION

1. Pour tout x réel, $x + 2\pi \in$ R. La fonction cosinus est périodique de période 2π donc $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

$f(x + 2\pi) = 3 + 2\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})\sqrt{3 - \cos(x + 2\pi)} = 3 + 2\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})\sqrt{3 - \cos x} = f(x)$ donc 2π est période de f

2. Pour tout x réel, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $2 \leq 3 - \cos x \leq 4$ donc $\sqrt{2} \leq \sqrt{3 - \cos x} \leq 2$ donc

$3 + 2\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2}) \times 2 \leq 3 + 2\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})\sqrt{3 - \cos x} \leq 3 + 2\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2}) \times \sqrt{2}$

$3 + 2\sqrt{2} - 4 - 2\sqrt{2} \leq f(x) \leq 3 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2$ donc pour tout nombre réel x on a $-1 \leq f(x) \leq 1$

3. Pour tout x réel, $-x \in$ R, la fonction cosinus est paire donc $\cos(-x) = \cos x$

$f(-x) = 3 + 2\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})\sqrt{3 - \cos(-x)} = 3 + 2\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})\sqrt{3 - \cos x} = f(x)$ donc f est paire

4. 2π est période de f donc il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur 2π puis tracer la courbe de f sur cet intervalle et effectuer des translations successives $2k\pi\,\vec{i}$ ($k \in$ Z), choix de l'intervalle : $[-\pi ; \pi]$

La fonction f est paire donc il suffit d'étudier f sur $[0 ; \pi]$, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc la courbe étant tracée sur $[0 ; \pi]$, pour avoir la courbe sur $[-\pi ; \pi]$, il suffit d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

5. La fonction cosinus est dérivable sur R, pour tout x réel, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $3 - \cos x > 0$, la fonction racine carrée est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ donc f est dérivable sur R.

6. Soit $u(x) = 3 - \cos x$, $u'(x) = \sin x$

$f(x) = 3 + 2\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})\sqrt{3 - \cos x}$ devient $f(x) = 3 + 2\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})\sqrt{u(x)}$ donc $f'(x) = -(2 + \sqrt{2})\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$f'(x) = -(2 + \sqrt{2})\frac{\sin x}{2\sqrt{3 - \cos x}}$

$2 + \sqrt{2} > 0$ et $\sqrt{3 - \cos x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe $-\sin(x)$

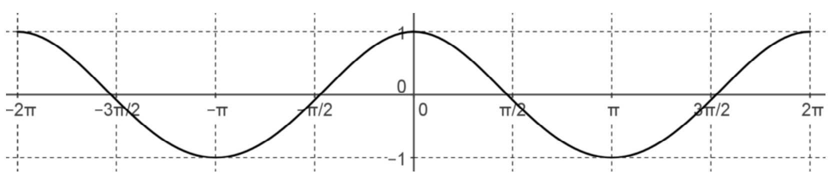
7. En représentant la courbe sur $[0 ; \pi]$, on place les points :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	π
$f(x)$	1	0,85	0,47	– 0,02	– 0,48	– 0,83	– 0,99	– 1

On effectue une symétrie de chacun de ces points par rapport à l'axe des ordonnées ce qui donne la courbe sur $[-\pi ; \pi]$.

On effectue une translation de vecteur $-2\pi\,\vec{i}$ de la courbe initiale, ce qui donne la courbe sur $[-2\pi ; -\pi]$

On effectue une translation de vecteur $2\pi\,\vec{i}$ de la courbe connue sur $[-\pi ; 0]$, ce qui donne la courbe sur $[\pi ; 2\pi]$



La courbe de f ressemble beaucoup à celle de la fonction cosinus.

8. Le coefficient directeur à C en $x = \frac{\pi}{2}$ est $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = -(2+\sqrt{2})\frac{\sin x}{2\sqrt{3-\cos x}} \text{ donc } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(2+\sqrt{2})\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{3-\cos\frac{\pi}{2}}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(2+\sqrt{2})\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{6}$$

9. La dérivée de cos x est – sin x, si $f(x) = =$ cos x alors le coefficient directeur à C en $x = \frac{\pi}{2}$ devrait être $-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ soit – 1 ce qui n'est pas le cas donc f n'est pas la fonction cosinus.

10, Soit g la fonction définie sur $[0 ; \pi]$ par $g(x) = \cos(x) - f(x)$.

g est définie dérivable sur $[0 ; \pi]$ et $g'(x) = -\sin x + (2+\sqrt{2})\frac{\sin x}{2\sqrt{3-\cos x}}$

$$g'(x) = \sin x\left(-1+\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{3-\cos x}}\right) \Leftrightarrow g'(x) = \sin x\,\frac{2+\sqrt{2}-2\sqrt{3-\cos x}}{2\sqrt{3-\cos x}}$$

Soit $h(x) = 2+\sqrt{2}-2\sqrt{3-\cos x}$, $g'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{3-\cos x}}h(x)$

Sur $[0 ; \pi]$, $\frac{\sin x}{2\sqrt{3-\cos x}} \geq 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que $h(x)$

En multipliant et divisant par l'expression conjuguée : $h(x) = \frac{(2+\sqrt{2})^2 - 4(3-\cos x)}{2+\sqrt{2}+2\sqrt{3-\cos x}}$

$$h(x) = \frac{4+4\sqrt{2}+2-4(3-\cos x)}{2+\sqrt{2}+2\sqrt{3-\cos x}} \Leftrightarrow h(x) = \frac{4\cos x+4\sqrt{2}-6}{2+\sqrt{2}+2\sqrt{3-\cos x}} \Leftrightarrow h(x) = \frac{4\left(\cos x - \frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)}{2+\sqrt{2}+2\sqrt{3-\cos x}}$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \frac{3-2\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$$

$-1 < \frac{3}{2} - \sqrt{2} < 1$ or la fonction cosinus est définie continue strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$, l'image de $[0 ; \pi]$ par cette fonction est $[-1 ; 1]$

$\frac{3}{2} - \sqrt{2} \in [-1 ; 1]$ donc il existe un réel α unique dans $[0 ; \pi]$ tel que $\cos\alpha = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$

La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$, donc pour tout x de $[0 ; \alpha]$, $h(x) \geq 0$ et pour tout x de $[\alpha ; \pi]$, $h(x) \leq 0$

x	0		α		π
$\frac{\sin x}{2\sqrt{3-\cos x}}$	0	+		+	0
$h(x)$		+	0	–	
$g'(x)$	0	+	0	–	0
g	0	↗	$g(\alpha)$	↘	0

Pour tout x de $[0 ; \pi]$, $0 \leq x \leq g(\alpha)$

$g(x) = \cos x - 3 - 2\sqrt{2} + (2+\sqrt{2})\sqrt{3-\cos x}$ donc $g(\alpha) = \cos\alpha - 3 - 2\sqrt{2} + (2+\sqrt{2})\sqrt{3-\cos\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ donc $g(\alpha) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} - 3 - 2\sqrt{2} + (2+\sqrt{2})\sqrt{3-\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)}$

$g(\alpha) = -\frac{3}{2} - 3\sqrt{2} + (2+\sqrt{2})\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}$

$g(\alpha) \approx 0{,}0858$ donc pour tout x de $[0 ; \pi]$, $0 \leq x \leq 0{,}09$

Pour tout de $[0 ; \pi]$, l'erreur effectuée en remplaçant $f(x)$ par $\cos(x)$ est inférieur à 0,09