Un entier naturel N s'écrit $1x3y5$ en numération décimale.

1. Montrer que N est divisible par 13 si et seulement si $x \equiv 10\,y + 9$ modulo 13
2. Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ tels que N soit divisible par 13 puis écrire la liste des valeurs de N correspondantes.

CORRECTION

1. $N = 5 + 10\,y + 3 \times 10^2 + x \times 10^3 + 10^4$

$10^2 = 100 = 13 \times 7 + 9$ donc $10^2 \equiv 9$ modulo 13 donc $3 \times 10^2 \equiv 27$ modulo 13 or $27 = 2 \times 13 + 1$ donc $3 \times 10^2 \equiv 1$ modulo 13

$10 \times 10^2 = 10^3$ donc $10^3 \equiv 9 \times 10$ modulo 13 or $90 = 7 \times 13 - 1$ donc $10^3 \equiv -1$ modulo 13 donc $x \times 10^3 \equiv -x$ modulo 13

$10 \times 10^3 = 10^4$ donc $10^4 \equiv -10$ modulo 13 donc $10^4 \equiv 13 - 10$ modulo 13 soit $10^4 \equiv 3$ modulo 13
$N \equiv 5 + 10\,y + 1 - x + 3$ modulo 13
$N \equiv 9 + 10\,y - x$ modulo 13

N divisible par 13 si et seulement si $N \equiv 0$ modulo 13
$N \equiv 0$ modulo 13 $\Leftrightarrow 9 + 10\,y - x \equiv 0$ modulo 13 $\Leftrightarrow x \equiv 9 + 10\,y$ modulo 13

y est congru modulo 13 à :	0	1	2	3	$\cancel{4}$	5	6	7	$\cancel{8}$	9	$\cancel{10}$	$\cancel{11}$	$\cancel{12}$
$10\,y + 9$ est congru modulo 13 à :	9	6	3	0	$\cancel{10}$	7	4	1	$\cancel{11}$	8	$\cancel{5}$	$\cancel{2}$	$\cancel{12}$

N est divisible par 13 si et seulement si $x \equiv 10\,y + 9$ modulo 13

x et y sont des chiffres donc sont des entiers naturels compris entre 0 et 9 donc les colonnes rayées ne conviennent pas
Les couples solutions sont donc : (9 ; 0) (6 ; 1) (3 ; 2) (0 ; 3) (7 ; 2) (4 ; 6) (1 ; 7) (8 ; 9)
$N \in \{19305\,;\,16315\,;\,13325\,;\,10335\,;\,17325\,;\,14365\,;\,11375\,;\,18395\}$