Soit la relation (F) : $7^n - 3 \times 2^m = 1$ où n et m sont des entiers naturels.

1. Pour m supérieur ou égal à 5,

a. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n ; m)$ vérifie (F), alors n est divisible par 4.

b. En déduire que si le couple $(n ; m)$ vérifie (F), alors 7^n est congru à 1 modulo 5

c. Existe-t-il des couples $(n ; m)$ vérifiant (F) ?

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls $(n ; m)$ vérifiant (F).

CORRECTION

1. *a.* Etudions les restes de la division par 32 des puissances de 7

$7^2 = 49 = 32 + 17$ donc $7^2 \equiv 17$ modulo 32

$7^2 \equiv 17$ modulo 32 donc $7^3 \equiv 17 \times 7$ modulo 32 or $17 \times 7 = 119 = 32 \times 3 + 23$ donc $7^3 \equiv 23$ modulo 32

$7^4 \equiv 23 \times 7$ modulo 32 or $23 \times 7 = 161 = 32 \times 5 + 1$ donc $7^4 \equiv 1$ modulo 32

Pour tout entier naturel q, $7^{4q} \equiv 1$ modulo 32

En multipliant par 7 : $7^{4q+1} \equiv 7$ modulo 32 ; donc $7^{4q+2} \equiv 17$ modulo 32 et $7^{4q+3} \equiv 23$ modulo 32

Soit n un entier naturel, dans la division de n par 4, $n = 4q + r$

r	0	1	2	3
7^n est congru modulo 7 à	1	7	23	23

Si le couple $(n ; m)$ vérifie (F), alors $7^n - 3 \times 2^{m-5} \times 2^5 = 1$

$m \geq 5$, donc $m - 5 \geq 0$ donc $7^n - 3 \times 2^{m-5} \times 32 = 1$ donc $7^n \equiv 1$ modulo 32

D'après le tableau précédent, ceci ne se produit que si $r = 0$ donc si n est divisible par 4.

b. Si le couple $(n ; m)$ vérifie (F), alors n est divisible par 4 donc $n = 4q$ donc $7^n = 7^{4q}$

$7 \equiv 2$ modulo 5 donc $7^n \equiv 2^{4q}$ modulo 5

$7^4 \equiv 2^4$ modulo 5 or $2^4 = 16 = 3 \times 5 + 1$ donc $2^4 \equiv 1$ modulo 5 donc $2^{4q} \equiv 1$ modulo 5 soit $7^n \equiv 1$ modulo 5

c. $7^n \equiv 1$ modulo 5 donc $7^n - 1$ est divisible par 5 or $7^n - 1 = 3 \times 2^m$

5 et 3 d'une part et 5 et 2 d'autre part sont premiers entre eux donc 5 et 3×2^m sont premiers entre eux donc 5 ne divise pas 3×2^m.

Si $m \geq 5$, l'équation (F) n'admet pas de solution.

2. Si $m \geq 5$, l'équation (F) n'admet pas de solution, cherchons s'il existe des solutions de (F) pour $0 \leq m \leq 4$.

m	0	1	2	3	4
$1 + 3 \times 2^m$	4	7	13	25	49

Seuls 7 et 49 est des puissances de 7 :

$7 = 1 + 3 \times 2$ donc (1 ; 1) est solution de (F).

$7^2 = 1 + 3 \times 2^4$ donc (2 ; 4) est solution de (F).