France métropolitaine Septembre 2006

Dans tout l'exercice, λ désigne un nombre réel de l'intervalle] 0 ; 1].

1. On se propose d'étudier les fonctions dérivables sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(E_\lambda) : y' = y^2 + \lambda\, y \text{ et la condition } y(0) = 1.$$

On suppose qu'il existe une solution y_0 de (E_λ) strictement positive sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$ et on pose sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$: $z = \frac{1}{y_0}$.

Écrire une équation différentielle simple satisfaite par la fonction z.

2. Question de cours

PRÉ-REQUIS

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda\, y$ sont les fonctions $x \to C\, e^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.

a. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle (E'_λ) :

$$z' = -(\lambda\, z + 1) \text{ telle que } z(0) = 1.$$

b. Donner l'expression de cette fonction que l'on notera z_0.

On veut maintenant montrer que la fonction z_0 ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$.

3. *a*. Démontrer que $\ln(1 + \lambda) > 1$

On pourra étudier sur] 0 ; 1] *la fonction f définie par* $f(x) = \ln(1 + x) - \frac{x}{x+1}$.

b. En déduire que $\frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \frac{1}{2}$.

4. En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$.

Démontrer alors que (E_λ) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$ que l'on précisera.

5. En déduire que la fonction z_0 ne s'annule pas sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$.

Démontrer alors que (E_λ) admet une solution strictement positive sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right[$ que l'on précisera.

CORRECTION

1. $z = \frac{1}{y_0}$ donc z ne s'annule pas sur] – ∞ ; ½] et $y_0 = \frac{1}{z}$

y_0 est une fonction dérivable, ne s'annulant pas sur] – ∞ ; ½] donc $\frac{1}{y_0}$ est dérivable sur] – ∞ ; ½] et $y_0' = \frac{-z'}{z^2}$

y_0 est solution de (E_λ) donc vérifie $y_0' = y_0^2 + \lambda\, y_0$; en remplaçant y_0' par $\frac{-z'}{z^2}$ et y_0 par $\frac{1}{z}$, on obtient :

$\frac{-z'}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \lambda\frac{1}{z}$ soit $-z' = 1 + \lambda\, z$ ou $z' = -(\lambda\, z + 1)$

2. Question de cours

***a*.** <u>Existence d'une solution :</u>

La fonction définie par $f(x) = \frac{-1}{\lambda}$ est constante donc est dérivable sur I et $f'(x) = 0$ de plus $\lambda\, f(x) + 1 = \lambda\left(\frac{-1}{\lambda}\right) + 1 = 0$

donc $f' = -(\lambda\, f + 1)$ donc f est solution de (E)

<u>Forme générale des solutions de (E)</u>

Soit g une solution de (E) donc $g' = -(\lambda\, g + 1)$

Montrons que $g - f$ est solution de $y' = -\lambda\, y$

$(g - f)' = g' - f'$ or $g' = -(\lambda\, g + 1)$ et $f' = -(\lambda\, f + 1)$

donc en remplaçant : $(g - f)' = -(\lambda\, g + 1) + (\lambda\, f + 1)$ soit $(g - f)' = -\lambda\,(g - f)$

donc $g - f$ est solution de $y' = -\lambda\, y$

$g - f$ est donc de la forme $C\, e^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle donc $g(x) = f(x) + C\, e^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.

$g(x) = \frac{-1}{\lambda} + C\, e^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle.

Unicité de la solution de (E'_λ) telle que $z(0) = 1$.

Parmi les solutions de (E'_λ), donc parmi les fonctions de la forme $\frac{-1}{\lambda} + C\,e^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle, on cherche celle(*s*) qui vérifierai(en)*t* $g(0) = 1$

en remplaçant : $g(0) = \frac{-1}{\lambda} + C\,e^{-\lambda\times 0}$ donc $\frac{-1}{\lambda} + C = 1$ soit $C = \frac{1}{\lambda} + 1 = \frac{1+\lambda}{\lambda}$

On a trouvé une seule valeur de C donc il existe une seule solution de (E'_λ) telle que $z(0) = 1$.

b. $z_0(x) = \frac{-1}{\lambda} + \frac{1+\lambda}{\lambda}\,e^{-\lambda x}$

3. *a.* f est définie continue dérivable sur $]0\,;1]$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{x+1-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$

$x \in\,]0\,;1]$ donc $f'(x) > 0$, f est strictement croissante sur $]0\,;1]$ de plus $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$ donc pour tout x de $]0\,;1]$, $f(x) > 0$

donc pour tout λ de $]\,0\,;1\,]$, $\ln(1+\lambda) > \frac{\lambda}{\lambda+1}$.

b. pour tout λ de $]\,0\,;1\,]$, $\ln(1+\lambda) > \frac{\lambda}{\lambda+1}$ donc $\frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \frac{1}{\lambda+1}$

or $\lambda \in\,]\,0\,;1\,]$, donc $0 < \lambda \leq 1$ soit $1 < \lambda + 1 \leq 2$ donc $\frac{1}{\lambda+1} \geq \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \frac{\lambda}{\lambda+1} \geq \frac{1}{2}$ soit $\frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \frac{1}{2}$

4. Pour tout x de $]-\infty\,;½\,]$, $z_0(x) = \frac{-1}{\lambda} + \frac{1+\lambda}{\lambda}\,e^{-\lambda x}$

Supposons qu'il existe une valeur de x dans $]-\infty\,;½\,]$, telle que $z_0(x) = 0$

$z_0(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\lambda} + \frac{1+\lambda}{\lambda}\,e^{-\lambda x} = 0$ et $x \in\,]-\infty\,;½\,] \Leftrightarrow (1+\lambda)\,e^{-\lambda x} = 1$ et $x \in\,]-\infty\,;½\,] \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda+1}$ et $x \in\,]-\infty\,;½\,]$,

$\Leftrightarrow -\lambda x = \ln\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)$ et $x \in\,]-\infty\,;½\,]$, or $\ln\left(\frac{1}{1+\lambda}\right) = -\ln(1+\lambda)$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda)$ et $x \in\,]-\infty\,;½\,]$, or $\frac{1}{\lambda}\ln(1+\lambda) > \frac{1}{2}$ donc $x \notin\,]-\infty\,;½\,]$

Il n'existe donc pas de valeur de x dans $]-\infty\,;½\,]$, telle que $z_0(x) = 0$, la fonction z_0 ne s'annule pas sur $]-\infty\,;½\,]$.

D'après la question (1) s'il existe une solution y_0 de (E_λ) telle que $y' = y^2 + \lambda y$ et $y(0) = 1$ alors $z = \frac{1}{y_0}$ vérifie (E'_λ) et de plus $z(0) = \frac{1}{y_0(0)} = 1$.

D'après la question (2) $z_0(x) = \frac{-1}{\lambda} + \frac{1+\lambda}{\lambda}\,e^{-\lambda x}$; z_0 ne s'annule pas sur $]-\infty\,;½\,]$, donc $y(x) = \frac{1}{z_0(x)}$

soit $y(x) = \frac{\lambda}{(1+\lambda)\,e^{-\lambda x} - 1}$

$z_0(x) = \frac{-1}{\lambda} + \frac{1+\lambda}{\lambda}\,e^{-\lambda x}$ et $\lambda \in\,]\,0\,;1]$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} z_0(x) = +\infty$

z_0 est une fonction continue sur $]-\infty\,;½\,]$, ne s'annulant par sur cet intervalle donc garde un signe constant sur $]-\infty\,;½\,]$, donc pour tout x de $]-\infty\,;½\,]$, $z_0(x) > 0$

donc (E_λ) admet une solution strictement positive définie par $y(x) = \frac{\lambda}{(1+\lambda)\,e^{-\lambda x} - 1}$ sur $]-\infty\,;½\,]$.