Pondichéry avril 2008

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

1. Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ et soit H la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $H(x) = \int_1^x f(t)\,dt$.

a. Justifier que f et H sont bien définies sur $[1, +\infty[$.

b. Quelle relation existe-t-il entre H et f ?

c. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre H(3).

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre H(3).

a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x}{e^x - 1} = x \times \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

b. En déduire que $\int_1^3 f(x)\,dx = 3\ln\left(1 - \dfrac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x})\,dx$

c. Montrer que si $1 \leq x \leq 3$, alors $\ln\left(1 - \dfrac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \dfrac{1}{e^3}\right)$.

d. En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln(1 - e^{-x})\,dx$ puis de $\int_1^3 f(x)\,dx$

EXERCICE 2 5 points

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants:

a. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes Z_A, Z_B et Z_C trois points A, B et C.

Alors $\left|\dfrac{Z_B - Z_C}{Z_B - Z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et arg $\left(\dfrac{Z_B - Z_C}{Z_B - Z_C}\right) = (\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB})\ [2\pi]$

b. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel : $z = e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : Démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $Z_A = -\sqrt{3} - i$, $Z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $Z_C = \sqrt{3} + i$ et $Z_D = -1 + i\sqrt{3}$

1. *a*. Donner le module et un argument pour chacun des quatre nombres complexes Z_A, Z_B, Z_C et Z_D.

b. Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$?

c. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD?

2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par : $E = r(A)$ et $F = r(C)$.

a. Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?

b. Donner l'écriture complexe de r.

c. Déterminer l'affixe du point E.

EXERCICE 2 (spécialité) 5 points

Partie A

On suppose connu le résultat suivant:

Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de cours : On se place dans le plan complexe. Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B, C,D d'affixes respectives :

$$Z_A = -\sqrt{3} - i,\ Z_B = 1 - i\sqrt{3},\ Z_C = \sqrt{3} + i \text{ et } Z_D = -1 + i\sqrt{3}$$

1. *a*. Donner le module et un argument de chacun des quatre nombres complexes Z_A, Z_B, Z_C et Z_D.

b. Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).

Déterminer le milieu du segment [AC], celui du segment [BD]. Calculer le quotient $\dfrac{Z_B}{Z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

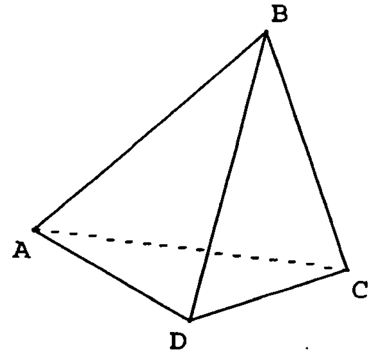
2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z + 2$.

a. Déterminer les éléments caractéristiques de g.

b. Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O.
c. Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

EXERCICE 3 **4 points**

On considère un tétraèdre ABCD.
On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes [AB], [CD], [BC], [AD], [AC] et [BD].
On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.
1. Montrer que les droites (IJ) , (KL) et (MN) sont concourantes en G.
Dans la suite de l'exercice, on suppose que AB = CD, BC = AD et AC = BD.
(On dit que le tétraèdre ABCD est équifacial, car ses faces sont isométriques).
2. *a*. Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ? Préciser également la nature des quadrilatères IMJN et KNLM.
b. En déduire que (IJ) et(KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.
3. *a*. Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).
b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB) . Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).
c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de [AB] et [CD].
d. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD ?



EXERCICE 4 **7 points**

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.
Les parties A et B sont indépendantes

Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et,

$$\text{pour tout } n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n).$$

1. Soit f la fonction définie sur [0 ; 20] par :

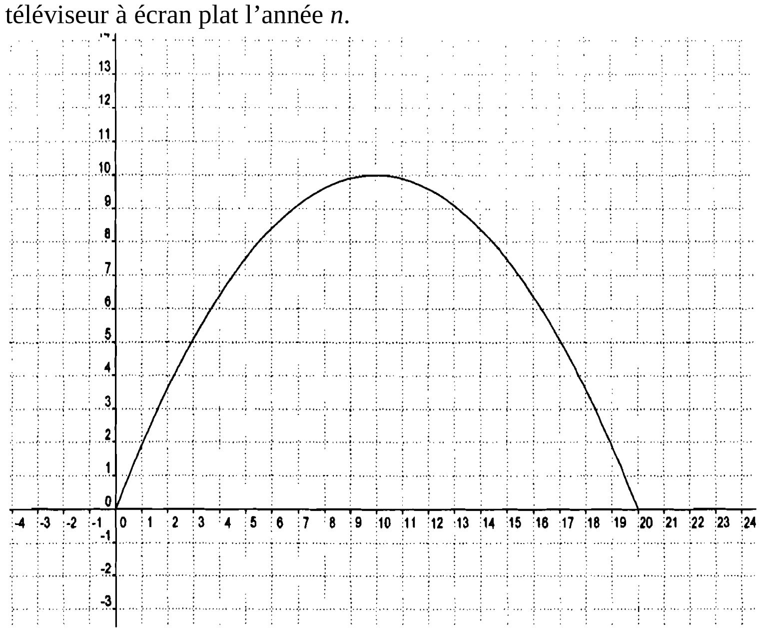
$$f(x) = \frac{1}{10} x (20 - x).$$

a. Étudier les variations de f sur [0 ; 20]
b. En déduire que pour tout $x \in [0 ; 10]$, $f(x) \in [0 ; 10]$.
c. On donne en annexe la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10.$$

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.



Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x. On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle (E): $y' = \frac{1}{20} y (10 - y)$

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$,

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $(E_1) : z' = -\frac{1}{2} z + \frac{1}{20}$.

b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$

3. Étudier les variations de g sur $[0, +\infty[$.
4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.
5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

CORRECTION

EXERCICE 1

1. *a*. Les fonctions $x \to e^{x} - 1$ et $x \to x$ sont définies continues sur $[1, +\infty[$, et pour tout x de $[1, +\infty[$, $e^{x} - 1 \neq 0$ donc f est définie continue sur $[1, +\infty[$.
f est définie continue sur $[1, +\infty[$ donc H est définie sur $[1, +\infty[$.

b. f est définie continue sur $[1, +\infty[$ donc H est la primitive nulle en 1 de f

c. f est positive sur $[1, +\infty[$ donc H(3) est l'aire (en unités d'aires) du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

2. *a*. $e^{-x} \times e^{x} = 1$ donc $\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{e^{-x}\times e^{x}}{(1-e^{-x})\times e^{-x}} = \dfrac{1}{e^{x}-1}$ donc $x\times \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{x}{e^{x}-1}$

b. Soit $u'(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ $\quad u(x) = \ln(1 - e^{-x})$

$v(x) = x \quad v'(x) = 1$

donc $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[x\ln(1-e^{-x})\right]_1^3 - \int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\ln(1-e^{-3}) - \ln(1-e^{-1}) - \int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3\ln\left(1-\frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x$

c. La fonction $x \to e^{-x}$ est décroissante sur R donc si $1 \leq x \leq 3$, $e^{-3} \leq e^{-x} \leq e^{-1}$ alors $-e^{-1} \leq -e^{-x} \leq -e^{-3}$ donc $\left(1-\dfrac{1}{e}\right) \leq (1 - e^{-x}) \leq \left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$.

La fonction ln est croissante sur $]0 ; +\infty[$ donc si $1 \leq x \leq 3$, alors $\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$.

d. La fonction $x \to \ln(1 - e^{-x})$ est continue sur $[1 ; 3]$ donc $\displaystyle\int_1^3 \ln(1-e^{-1})\,\mathrm{d}x \leq \int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x \leq \int_1^3 \ln(1-e^{-3})\,\mathrm{d}x$

donc $2\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right) \leq \displaystyle\int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x \leq 2\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$.

$-2\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right) \geq -\displaystyle\int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x \geq -2\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$ donc

$3\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right) - 2\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right) \geq 3\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right) - \displaystyle\int_1^3 \ln(1-e^{-x})\,\mathrm{d}x \geq 3\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right) - 2\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right)$

Soit : $\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right) \leq \displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leq 3\ln\left(1-\dfrac{1}{e^3}\right) - 3\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right) - 2\ln\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$

EXERCICE 2

Partie A

r est la rotation de centre Ω d'angle α donc pour tout point M du plan différent de Ω, si $M' = r(M)$, on a :

$\Omega M = \Omega M'$ et $(\overrightarrow{\Omega M} ; \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha\ [2\pi]$

donc $|z - \omega| = |z' - \omega|$ et $\arg\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) \equiv \alpha\ [2\pi]$ donc $\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right)$ est un complexe de module 1 d'argument α donc $\left(\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = e^{i\alpha}$

donc $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$

Si $M = \Omega$, alors $M' = \Omega$ la relation précédente est vérifiée donc la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$

Partie B

1. *a.* $|Z_C| = \sqrt{3+1} = 2$; donc $Z_C = \sqrt{3} + i = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ donc $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $\arg Z_C = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$Z_A = -Z_C$ donc $|Z_A| = |Z_C| = 2$ et $\arg Z_A = \pi + \arg Z_C$ donc $\arg Z_A = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$Z_B = -i Z_C$ donc $|Z_B| = |Z_C| = 2$ et $\arg Z_B = -\dfrac{\pi}{2} + \arg Z_C$ donc $\arg Z_B = \dfrac{-\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$Z_D = -Z_B$ donc $|Z_D| = |Z_C| = 2$ et $\arg Z_D = \pi + \arg Z_B$ donc $\arg Z_D = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

b. Il suffit de construire le cercle C de centre O de rayon 2, puis I étant le point de coordonnées (0 ; 2) construire le cercle de centre I de rayon 2, ce cercle coupe C en 2 points, celui d'abscisse positive est C.

$Z_A = -Z_C$ donc A est le symétrique de C par rapport à O donc le point diamétralement opposé à C sur C.

$Z_D = i Z_C$ donc $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ et D appartient à C donc D est le point de C appartenant à la médiatrice de [AC] tel que ($\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$Z_B = -Z_D$ donc B est le symétrique de D par rapport à O donc le point diamétralement opposé à D sur C.

c. A est le symétrique de C par rapport à O et B est le symétrique de D par rapport à O donc ABCD est un parallélogramme de centre O

[AC] et [BD] sont deux diamètres du cercle donc AC = BD donc ABCD est un rectangle

$Z_D = i Z_C$; D est l'image de C par la rotation de centre O d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ donc les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires en O donc ABCD est un losange

ABCD est un rectangle et un losange donc est un carré.

2. *a.* Il suffit de construire le cercle C_1 de centre B de rayon AB et le cercle C_2 de centre A de rayon AB

Ces deux cercles se coupent en deux points, un seul E vérifie $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

De même pour F avec les cercles de centre B de rayon BD et de centre D de même rayon.

b. $z' - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_B)$ donc $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} z + (1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}) z_B$

$z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z + \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - i\sqrt{3}) = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 2$

c. $z_E = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z_A + 2 = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} - i) + 2$

$z_E = \dfrac{-\sqrt{3} - i + 3i - \sqrt{3}}{2} + 2 = 2 - \sqrt{3} + i$

Figure exercice 2 (non spécialité)

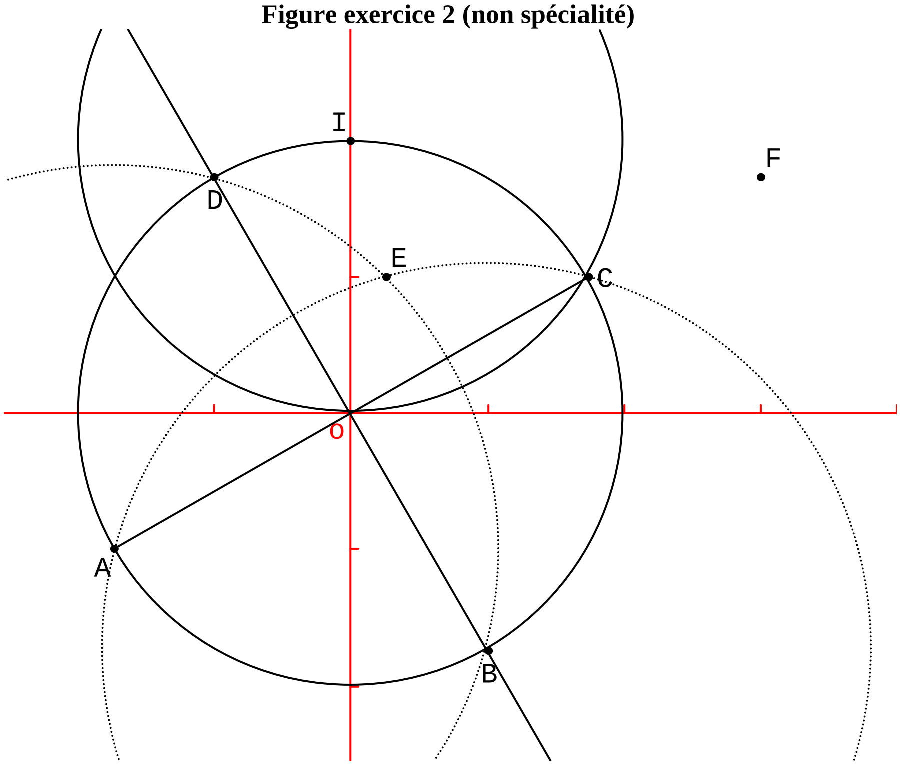
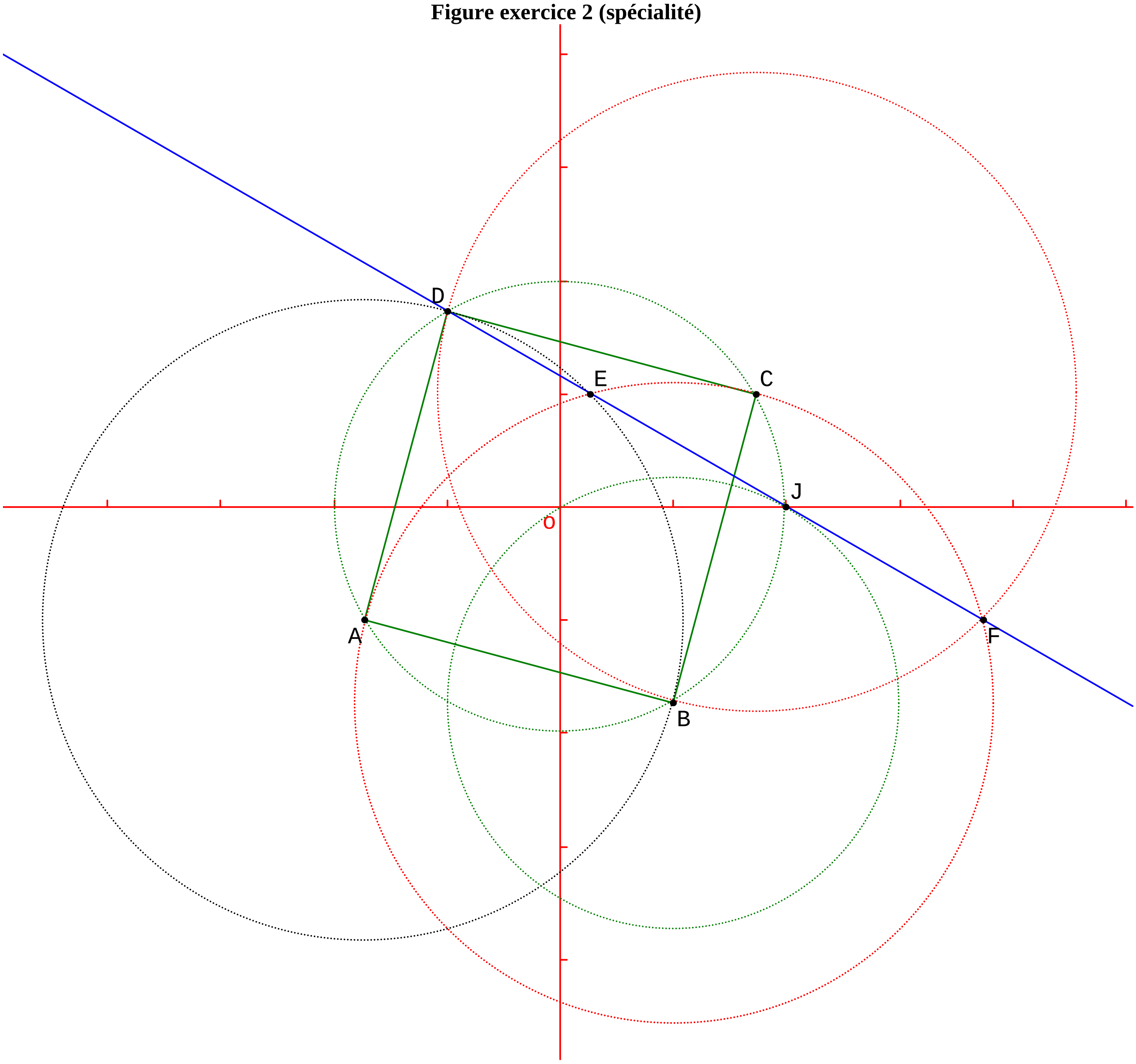


Figure exercice 2 (spécialité)



EXERCICE 2 (spécialité)

Partie A

L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = a\,z + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.
Il s'agit donc de déterminer, s'ils existent, a et b deux nombres complexes tels que $a \neq 0$ tels que $z_{A'} = a\,z_A + b$ et $z_{B'} = a\,z_B + b$

par différence membre à membre : $a\,(z_A - z_B) = z_{A'} - z_{B'}$, $A \neq B$ donc $z_A \neq z_B$ donc $a = \dfrac{z_{A'} - z_{B'}}{z_A - z_B}$

$A' \neq B'$ donc $z_{A'} - z_{B'} \neq 0$ donc $a \neq 0$.

$$\begin{cases} z_{A'} = a\,z_A + b \\ z_{B'} = a\,z_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_B\,z_{A'} = a\,z_B\,z_A + b\,z_B \\ z_{B'}\,z_A = a\,z_B\,z_A + b\,z_A \end{cases}$$

donc par différence membre à membre : $b = \dfrac{z_{A'}\,z_B - z_{B'}\,z_A}{z_A - z_B}$.

Si A, B, A' et B' sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$ alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

1. *a*. $|Z_C| = \sqrt{3+1} = 2$; donc $Z_C = \sqrt{3} + i = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ donc $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ donc $\arg Z_C = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$Z_A = -Z_C$ donc $|Z_A| = |Z_C| = 2$ et $\arg Z_A = \pi + \arg Z_C$ donc $\arg Z_A = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$Z_B = i\,Z_A$ donc $|Z_B| = |Z_A| = 2$ et $\arg Z_B = \dfrac{\pi}{2} + \arg Z_A$ donc $\arg Z_B = \dfrac{-\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$Z_D = -Z_B$ donc $|Z_D| = |Z_C| = 2$ et $\arg Z_D = \pi + \arg Z_B$ donc $\arg Z_D = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

b. Il suffit de construire le cercle $\mathscr{C}$ de centre O de rayon 2, puis I étant le point de coordonnées (0 ; 2) construire le cercle de centre I de rayon 2, ce cercle coupe $\mathscr{C}$ en 2 points, celui d'abscisse positive est C.
$Z_A = -Z_C$ donc A est le symétrique de C par rapport à O donc le point diamétralement opposé à C sur $\mathscr{C}$.
$Z_D = i\,Z_C$ donc $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ et D appartient à $\mathscr{C}$ donc D est le point de $\mathscr{C}$ appartenant à la médiatrice de [AC] tel que $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.
$Z_B = -Z_D$ donc B est le symétrique de D par rapport à O donc le point diamétralement opposé à D sur $\mathscr{C}$.

$Z_A = -Z_C$ donc le milieu du segment [AC] est le point O
$Z_D = -Z_B$ donc le milieu du segment [BD] est le point O, les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD ont le même milieu O donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
$Z_B = i\,Z_A$ donc $\dfrac{Z_B}{Z_A} = i$ donc B est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ donc OA = OB et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{\pi}{2}$, les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD ont la même longueur et sont perpendiculaires donc le quadrilatère ABCD est un carré.

2. *a*. L'écriture complexe est $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}\,z + 2$ donc g est une rotation d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

Le centre de la rotation est l'unique point invariant par g donc l'affixe du centre est solution de $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}\,z + 2$.

soit $z = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) z + 2 \Leftrightarrow 2z - (1 - i\sqrt{3})\,z = 4 \Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})\,z = 4 \Leftrightarrow z = 1 - i\sqrt{3}$ donc le centre de la rotation est B.

b. Pour construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O, il suffit de construire :
pour E : le cercle C_1 de centre B de rayon AB et le cercle C_2 de centre A de rayon AB. Ces deux cercles se coupent en deux points, un seul E vérifie $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}) \equiv -\dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.
De même pour F avec les cercles de centre B de rayon BCD et de centre C de même rayon.
et pour J avec les cercles de centre B de rayon BO et de centre O de même rayon.

c. Les points E, F et J sont apparemment alignés et J semble être le milieu de [EF].
E, F et J sont les images respectives par g des points A, C et O, Une rotation conserve les milieux, donc transforme le milieu O de [AC] en le milieu J de [EF].

EXERCICE 3

1. (IJ) , (KL) et (MN) ne sont pas confondues (ABCD est un tétraèdre)
G est le barycentre de {(A ; 1) (B ; 1) (C ; 1) (D ; 1)} donc d'après l'associativité du barycentre
G est le barycentre de {(I ; 2) (J ; 2)} donc G $\in$ (IJ)
G est le barycentre de {(A ; 1) (D ; 1) (B ; 1) (C ; 1)} donc de {(L ; 2) (K ; 2)} donc G $\in$ (KL)
G est le barycentre de {(A ; 1) (C ; 1) (B ; 1) (D ; 1)} donc de {(M ; 2) (N ; 2)} donc G $\in$ (MN)
Les droites (IJ) , (KL) et (MN) sont concourantes en G.

2. *a*. I est le milieu de [AB], K est le milieu de [BC] donc (IK) est parallèle à (AC) et IK = $\frac{1}{2}$AC

J est le milieu de [CD], L est le milieu de [AD] donc (JL) est parallèle à (AC) et JL = $\frac{1}{2}$AC

donc le quadrilatère IKJL a deux côtés opposés parallèles et de même longueur donc est un parallélogramme

K est le milieu de [BC], J est le milieu de [CD] donc (KJ) est parallèle à (BD) et KJ = $\frac{1}{2}$BD or AC = BD donc IK = KJ

Le parallélogramme IKJL a deux côtés consécutifs de même longueur donc est un losange

b. IKJL est un losange donc ses diagonales sont orthogonales donc (IJ) et (LK) sont orthogonales.

3. *a*. Pour les mêmes raisons que précédemment le quadrilatère IMNJ est un losange donc (IJ) et (MN) sont sécantes et orthogonales (diagonales du losange)
de même le quadrilatère LNKM est un losange donc (LK) et (MN) sont sécantes et orthogonales (diagonales du losange)
(IJ) est orthogonale à (LK) et à (MN) or les droites (LK) et (MN) sont sécantes donc (IJ) est orthogonale au plan (MKN)

b. La droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN) donc à toute droite de ce plan en particulier à (MK) donc $\overrightarrow{IJ}\,.\,\overrightarrow{MK} = 0$
K est le milieu de [BC], N est le milieu de [BD] donc (NK) est parallèle à (CD)
(NK) est parallèle à (CD) et (IJ) est orthogonale à (MK) donc à (CD)

c. Le plan médiateur de [AB] est le plan passant par le milieu I de [AB] et perpendiculaire à (AB)
donc toute droite passant par I et orthogonale à (AB) appartient au plan médiateur de [AB]
(IJ) est orthogonale à (AB) et passe par le milieu I de [AB] donc (IJ) appartient au plan médiateur de [AB]

Le plan médiateur de [CD] est le plan passant par le milieu J de [CD] et perpendiculaire à (CD)
(IJ) est orthogonale à (CD) et passe par le milieu J de [CD] donc (IJ) est incluse dans le plan médiateur de [CD].
G appartient à (IJ) donc G appartient au plan médiateur de [CD]

d. G appartient aux plans médiateurs de [AB] et [CD] donc GA = GB et GC = GD
Il suffit de montrer que G appartient au plan médiateur de [BC] pour avoir GB = GC donc GA = GB = GC = GD donc G centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD

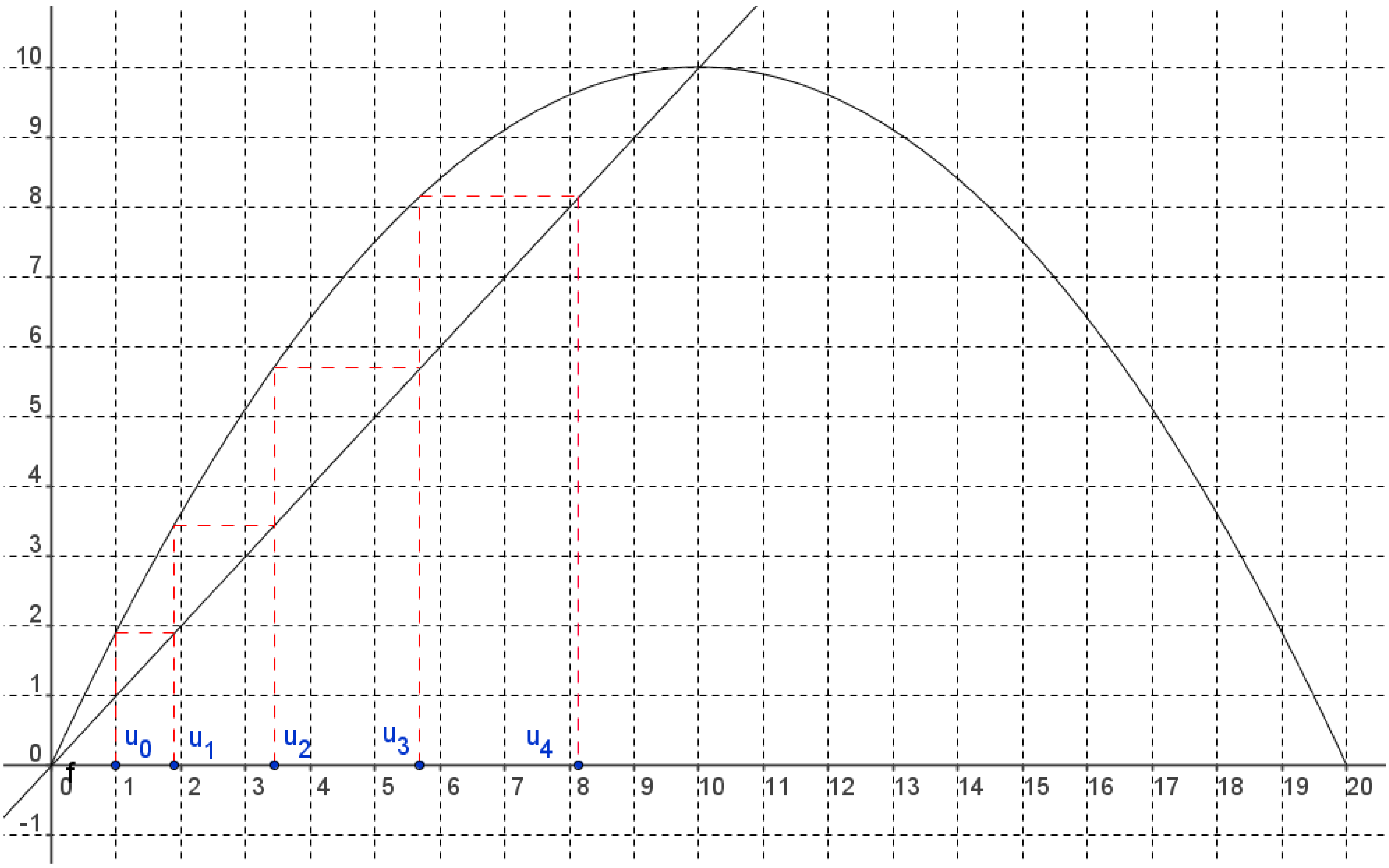
Pour montrer que G appartient au plan médiateur de [BC], il suffit de montrer que (LK) est orthogonale à (BC)
(LK) et (MN) sont orthogonales (diagonales du losange LNKM)
(LK) et (IJ) sont orthogonales (diagonales du losange IKJL)
les droites (IJ) et (MN) sont sécantes donc (LK) est orthogonale au plan (IJMN) donc en particulier à (JN) or (JN) est parallèle à (BC) donc (LK) est orthogonale à (BC), de plus K est le milieu de [BC] donc (LK) appartient au plan médiateur de [BC].
G est un point de (LK) donc du plan médiateur de [BC] donc GB = GC

EXERCICE 4

1. *a.* f est un polynôme donc est définie continue dérivable sur [0 ; 20], et $f'(x) = \dfrac{1}{10}(20 - 2x)$ donc :

x	0		10		20
$f'(x)$		+	0	–	
f	0	↗	10	↘	0

b. f est croissante sur [0 ; 10] donc pour tout x de [0 ; 10], $f(0) \leq f(x) \leq f(10)$
f est décroissante sur [10 ; 20] donc pour tout x de [10 ; 20], $f(20) \leq f(x) \leq f(20)$ donc pour tout $x \in [0 ; 10]$, $f(x) \in [0 ; 10]$.
c.



2. $u_0 = 1$ donc $u_1 = \dfrac{1}{10} u_0 (20 - u_0) = 1{,}9$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$.
La fonction f est croissante sur [0 ; 10] donc si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ alors $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10)$ soit $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$.
La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

3. La suite (u_n) est croissante majorée par 10 donc est convergente et sa limite est comprise entre u_0 et 10.
$u_{n+1} = f(u_n)$ or la fonction f est continue sur [0 ; 20] donc la limite de la suite (u_n) est solution de $f(x) = x$.
$\dfrac{1}{10} x (20 - x) = x \Leftrightarrow x(20 - x) = 10x \Leftrightarrow x(10 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 10$
la limite de la suite (u_n) est comprise entre u_0 et 10 donc (u_n) converge vers 10.

Partie B : un modèle continu

1. *a.* $z = \dfrac{1}{y}$, et y est dérivable sur $[0 ; +\infty[$, donc $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$

z est solution de l'équation différentielle : $(E_1) : z' = -\dfrac{1}{2} z + \dfrac{1}{20} \Leftrightarrow y$ est solution de $-\dfrac{y'}{y^2} = -\dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{20}$

$\Leftrightarrow y$ est solution de (E) $y' = \dfrac{1}{2} y - \dfrac{1}{20} y^2$ (en multipliant par $-y^2$)

$\Leftrightarrow y$ est solution de l'équation différentielle (E): $y' = \dfrac{1}{20} y (10 - y)$

b. Les solutions de l'équation (E_1) sont les fonctions de la forme : $z(x) = C\ e^{-\frac{1}{2}x} + \dfrac{1}{10}$ avec C constante réelle

y est solution de l'équation différentielle (E): $y' = \frac{1}{20}\, y\,(10 - y) \Leftrightarrow z$ est solution de l'équation différentielle : (E_1) : $z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}$

$\Leftrightarrow z(x) = C\, e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10} \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{10}{10\,C\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$ avec C constante réelle.

2. g est solution de(E) donc il existe une constante réelle C telle que $g(x) = \frac{10}{10\,C\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$ et $g(0) = 1$ donc $\frac{10}{10\,C\,e^{-\frac{1}{2}\times 0} + 1} = 1$

soit 10 C + 1 = 10 donc C = 0,9 donc $g(x) = \frac{10}{9\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$

3. $g'(x) = \frac{-10\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 9\,e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2} = \frac{45\,e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2}$ donc $g'(x) > 0$ sur $[0, +\infty[$.

g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

4. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{x}{2} \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 10$.

La fonction g admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = 10$
A long terme le nombre de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, est égal à 10 millions.

5. $g(x) \geq 5 \Leftrightarrow \frac{10}{9\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1} \geq 5 \Leftrightarrow 2 \geq 9\,e^{-\frac{1}{2}x} + 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x} \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x \leq \ln\left(\frac{1}{9}\right) \Leftrightarrow x \geq 2\ln 9$

$2\ln 9 \approx 4{,}4$ donc en 2005 + 5 soit 2010, le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera 5 millions.