EXERCICE 4

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous):

$$p(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$p(X > t) = 1 - p(X \le t) = e^{-\lambda t}$$

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :

a. si ce composant est défectueux ;

b. si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.

2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.

Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :

$$P(T > t) = 0{,}02\ e^{-5\times 10^{-4} t} + 0{,}98\ e^{-10^{-4} t}.$$

(on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).

3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?

Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

CORRECTION

1. *a.* si ce composant est défectueux ; $\lambda = 5 \times 10^{-4}$

$p(X > 1000) = 1 - p(X \le 1000) = e^{-1000\lambda} = e^{-0,5} \approx 0{,}6065$

b. si ce composant n'est pas défectueux ; $\lambda = 10^{-4}$

$p(X > 1000) = 1 - p(X \le 1000) = e^{-1000\lambda} = e^{-0,1} \approx 0{,}90$

2. Soit les événements :

D : « le composant est défectueux »

F : « il est encore en état de marche après t heures de fonctionnement »

Si le composant est encore en état de marche après t heures de fonctionnement, alors :

soit le composant est défectueux et est encore en état de marche après t heures de fonctionnement $(D \cap F)$

soit le composant n'est pas défectueux et est encore en état de marche après t heures de fonctionnement $(\overline{D} \cap F)$

donc $P(T > t) = p(D \cap F) + p(\overline{D} \cap F)$

$P(T > t) = p_D(F) \times p(D) + p_{\overline{D}}(F) \times p(\overline{D})$

or $p_D(F) = e^{-5\times 10^{-4} t}$ et $p_{\overline{D}}(F) = e^{-10^{-4} t}$,

de plus $p(D) = 0{,}02$ et $p(\overline{D}) = 0{,}98$ donc : $P(T > t) = 0{,}02\ e^{-5\times 10^{-4} t} + 0{,}98\ e^{-10^{-4} t}$.

3. $p_{(X > t)}(D) = \dfrac{p(D \cap F)}{p(F)} = \dfrac{0{,}02\ e^{-5\times 10^{-4} t}}{e^{-5\times 10^{-4} t} + e^{-10^{-4} t}}$

$p_{(X > 1000)}(D) = \dfrac{0{,}02\ e^{-0,5}}{e^{-0,5} + e^{-0,1}} \approx 0{,}12$