On considère les deux courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$ dans un repère orthogonal du plan.
Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe une unique tangente (T) commune à ces deux courbes.

1 . Sur le graphique représenté dans l'annexe 1, tracer approximativement une telle tangente à l'aide d'une règle.
Lire graphiquement l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_1) et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec la courbe (C_2).

2. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point d'abscisse a de la courbe (C_1) et par B le point d'abscisse b de la courbe (C_2).

a) Déterminer une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_1) au point A.

b) Déterminer une équation de la tangente (T_B) à la courbe (C_2) au point B.

c) En déduire que les droites (T_A) et (T_B) sont confondues si et seulement si les réels a et b sont solutions du système (S) :

$$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - a e^a = b^2 - 1 \end{cases}.$$

d) Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') $\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4a e^a - 4 e^a - 4 = 0 \end{cases}.$

3. Le but de cette question est de prouver qu'il existe un unique réel solution de l'équation (E) $e^{2x} + 4x e^x - 4 e^x - 4 = 0$

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} + 4x e^x - 4 e^x - 4$

a) Montrer que pour tout x appartenant à $]-\infty ; 0[$, $e^{2x} - 4 < 0$ et $4 e^x (x-1) < 0$

b) En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty ; 0[$.

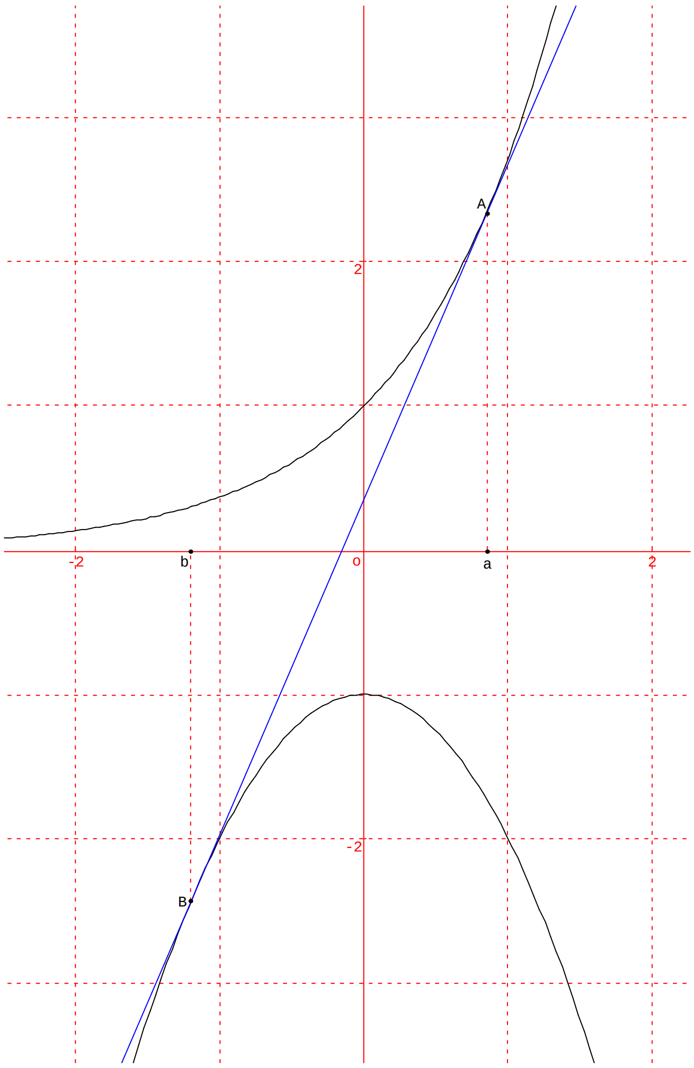
c) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

d) Démontrer que l'équation (E) admet une solution unique, dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note α cette solution. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

4. On prend pour A le point d'abscisse α. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites (T_A) et (T_B) sont confondues,

CORRECTION

1 .



l'abscisse du point de contact de la tangente avec la courbe (C_1) est approximativement 0,9
l'abscisse du point de contact de la tangente avec la courbe (C_2) est approximativement – 1,2.

2. *a*) La tangente à la courbe (C_1) au point A est la droite de coefficient directeur $f'(a) = e^{a}$ passant par A (a ; e^{a}) donc une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_1) au point A est $y = e^{a}(x - a) + e^{a}$

b) La tangente à la courbe (C_2) au point B est la droite de coefficient directeur $g'(b) = -2b$ passant par B (b ; $-b^2 - 1$)
Une équation de la tangente (T_B) à la courbe (C_2) au point B est $y = -2bx + b^2 - 1$

c) Les droites (T_A) et (T_B) sont confondues si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux ($e^{a} = -2b$) et leurs ordonnées à l'origine sont égales ($-a e^{a} + e^{a} = b^2 - 1$) soit les réels a et b sont solutions du système (S) : $\begin{cases} e^{a} = -2b \\ e^{a} - a e^{a} = b^2 - 1 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} e^{a} = -2b \\ e^{a} - a e^{a} = b^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = -e^{a} \\ 4e^{a} - 4a e^{a} = 4b^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{a} = -2b \\ 4e^{a} - 4a e^{a} = 4(e^{a})^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{a} = -2b \\ 4e^{a} - 4a e^{a} = 4e^{2a} - 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} e^{a} = -2b \\ e^{2a} + 4a e^{a} - 4e^{a} - 4 = 0 \end{cases}$.

3. *a*) pour tout x appartenant à $]-\infty ; 0[$, $2x \le 0$ donc $e^{2x} \le e^{0}$ soit $e^{2x} \le 1$ donc $e^{2x} - 4 \le -3 < 0$
pour tout x appartenant à $]-\infty ; 0[$, $4 > 0$; $e^{x} > 0$ et $(x - 1) < 0$ donc $4e^{x}(x - 1) < 0$

b) $e^{2x} + 4x e^{x} - 4e^{x} - 4 = e^{2x} - 4 + 4e^{x}(x - 1)$
La somme de deux nombres strictement négatifs est un nombre strictement négatif donc pour tout x appartenant à $]-\infty ; 0[$, $f(x) < 0$
L'équation (E) n'a pas de solution dans l'intervalle $]-\infty ; 0[$.

c) $f'(x) = 2e^{2x} + 4(e^{x} + x e^{x}) - 4e^{x}$ donc $f'(x) = 2e^{2x} + 4x e^{x} = 2(x + 2)e^{x}$
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, $x \ge 0$ donc $x + 2 > 0$ et $f'(x) > 0$

la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - 4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 4e^{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(0) = -7$

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, (somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$) strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

$f([0 ; +\infty[) = [-7 ; +\infty[$
$0 \in [-7 ; +\infty[$ donc l'équation (E) $f(x) = 0$ admet une solution unique, dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
$f(0{,}84) \approx -0{,}117$ et $f(0{,}85) \approx 0{,}07$ donc $f(0{,}84) < 0$ et $f(0{,}85) > 0$ donc $0{,}84 \le \alpha \le 0{,}85$.

4. $b = -\dfrac{1}{2}e^{a}$ or $0{,}84 \le a \le 0{,}85$ donc $e^{0{,}84} \le e^{\alpha} \le e^{0{,}85}$ donc $-\dfrac{1}{2}e^{0{,}85} \le -\dfrac{1}{2}e^{a} \le -\dfrac{1}{2}e^{0{,}84}$

soit $-1{,}2 \le -\dfrac{1}{2}e^{0{,}85} \le b \le -\dfrac{1}{2}e^{0{,}84} \le -1{,}1$