

Moyennes

On note a et b deux réels strictement positifs.

On définit $m = \frac{a+b}{2}$ et $g = \sqrt{ab}$ les moyennes arithmétique et géométrique des nombres a et b .

La moyenne harmonique h des nombres a et b est définie par $\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Montrer que l'on a : $h = \frac{2ab}{a+b}$.

Partie A

Dans cette partie, on prend $a = 40$ et $b = 10$.

1. Calculer m , g et h .
2. Vérifier que : $a > m > g > h > b$.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que $a > b > 0$.

On va démontrer, uniquement par des considérations géométriques, que $a > m > g > h > b$.

1.
 - a. Placer sur une droite trois points A, B et C dans cet ordre tels que $AB = a$ et $BC = b$.
 - b. Tracer un demi-cercle \mathcal{C} de diamètre $[AC]$; on appelle O son centre.
 - c. La perpendiculaire à (AC) passant par B coupe \mathcal{C} en M et la perpendiculaire à (OM) passant par B coupe (OM) en G.
Placer les points M et G.
2. Démontrer que $OM = \frac{a+b}{2}$; en déduire que $a > m > b$.
3.
 - a. Démontrer que les angles \widehat{BMC} et \widehat{MAB} sont égaux.
 - b. Exprimer la tangente de l'angle \widehat{MAB} dans le triangle MAB.
Exprimer la tangente de l'angle \widehat{BMC} dans le triangle BMC.
En déduire que $MB^2 = AB \times BC$ et donc que $MB = g$.
 - c. Déduire enfin que $m > g$.
4.
 - a. En utilisant des relations trigonométriques dans les triangles rectangles OMB et GMB, démontrer que $MB^2 = MG \times MO$.
 - b. En déduire que $MG = h$ puis que $g > h$.
 - c. Démontrer enfin que $MG > BC$, autrement dit que $h > b$.
On pourra utiliser les égalités $MO = MG + GO$ et de $OC = OB + BC$.
5. Conclure.

Moyennes – Correction

$$\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \iff \frac{2}{h} = \frac{b+a}{ab} \iff \frac{h}{2} = \frac{ab}{a+b} \iff h = \frac{2ab}{a+b}$$

Partie A

Dans cette partie, on prend $a = 40$ et $b = 10$.

1. $m = \frac{a+b}{2} = \frac{40+10}{2} = 25$; $g = \sqrt{ab} = \sqrt{40 \times 10} = \sqrt{400} = 20$ et

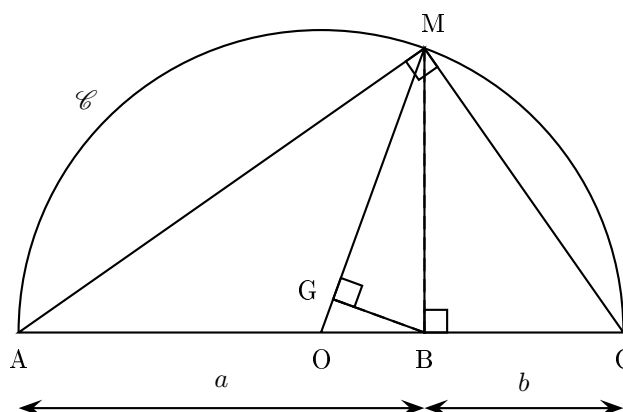
$$h = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2 \times 40 \times 10}{40+10} = \frac{800}{50} = 16$$

2. $40 > 25 > 20 > 16 > 10$ donc $a > m > g > h > b$

Partie B

Dans cette partie, on suppose que $a > b > 0$.

1. On construit la figure :



2. • [AC] est un diamètre du demi-cercle et [OM] est un rayon donc $AC = 2 OM$ ce qui veut dire que $OM = \frac{AC}{2}$. On peut dire aussi que $AC = AB + BC = a + b$.
Donc $OM = \frac{a+b}{2}$ est la moyenne arithmétique m de a et de b .
- $OM = OA < a$ et $OM = OC > b$ donc $a > m > b$.
3. a. *Rappel* – On appelle « angles complémentaires » deux angles dont la somme des mesures vaut 90° .

- Par construction le triangle MBC est rectangle en B donc les angles \widehat{BMC} et \widehat{MCB} sont complémentaires.
- Le triangle AMC est inscrit dans un cercle de diamètre [AC], donc il est rectangle en M; les angles \widehat{MAB} et \widehat{MCB} sont donc complémentaires.
- Des deux points précédents, on déduit :

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{BMC} + \widehat{MCB} = 90^\circ \\ \widehat{MAB} + \widehat{MCB} = 90^\circ \end{array} \right\} \text{ donc } \widehat{BMC} = \widehat{MAB}$$

- b. *Rappel* – Dans un triangle rectangle : tangente (angle non droit) = $\frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.
- Dans le triangle MAB : $\tan \widehat{\text{MAB}} = \frac{\text{MB}}{\text{AB}}$.
 - Dans le triangle BMC : $\tan \widehat{\text{BMC}} = \frac{\text{BC}}{\text{MB}}$.
 - $\widehat{\text{BMC}} = \widehat{\text{MAB}}$ donc $\tan \widehat{\text{BMC}} = \tan \widehat{\text{MAB}}$ ce qui équivaut à $\frac{\text{MB}}{\text{AB}} = \frac{\text{BC}}{\text{MB}}$ et donc $\text{MB}^2 = \text{AB} \times \text{BC} = ab$.
Donc $\text{MB} = \sqrt{ab}$ et donc MB est la moyenne géométrique g de a et de b .
- c. Dans le triangle OMB rectangle en B, le côté [OM] est l'hypoténuse donc c'est le plus grand côté du triangle donc $\text{OM} > \text{MB}$ et donc $m > g$.
4. a. *Rappel* – Dans un triangle rectangle : cosinus (angle non droit) = $\frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$.
- Dans le triangle OMB rectangle en B : $\cos \widehat{\text{OMB}} = \frac{\text{MB}}{\text{MO}}$.
 - Dans le triangle BMG rectangle en G : $\cos \widehat{\text{GMB}} = \frac{\text{MG}}{\text{MB}}$.
 - Les angles $\widehat{\text{OMB}}$ et $\widehat{\text{GMB}}$ sont les mêmes, donc leurs cosinus sont égaux et donc : $\frac{\text{MB}}{\text{MO}} = \frac{\text{MG}}{\text{MB}}$ ce qui équivaut à $\text{MB}^2 = \text{MG} \times \text{MO}$.
- b. • $\text{MB}^2 = \text{MG} \times \text{MO}$ donc $\text{MG} = \frac{\text{MB}^2}{\text{MO}}$.
- D'après les questions précédentes, $\text{MB}^2 = ab$ et $\text{MO} = m = \frac{a+b}{2}$ donc $\text{MG} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = h$ moyenne harmonique de a et de b .
- Dans le triangle MBG rectangle en G, l'hypoténuse est [MB] donc c'est le plus grand côté du triangle ; on en déduit que $\text{MB} > \text{MG}$ = ce qui veut dire que $g > h$.
- c. Dans le triangle OGB rectangle en G, l'hypoténuse est [OB] donc c'est le plus grand côté ; donc $\text{GO} < \text{OB}$ ce qui entraîne $\text{MG} + \text{GO} < \text{MG} + \text{OB}$.
 $\text{OC} = \text{MO}$ donc $\text{OB} + \text{BC} = \text{MG} + \text{GO}$ donc $\text{OB} + \text{BC} < \text{MG} + \text{OB}$ et donc $\text{BC} < \text{MG}$; on en déduit que $\text{MG} > \text{BC}$ c'est-à-dire $g > h$.
5. On a démontré successivement : $a > m > b$, $m > g$, $g > h$ et $h > b$.
On peut donc en déduire que $a > m > g > h > b$.