Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). On prendra pour le dessin : $\|\vec{u}\|$ = 4 cm.

M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M′ le point d'affixe z' telle que $z' = -\dfrac{1}{\bar{z}}$, où $\bar{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

A - Quelques propriétés

1. Soit z un nombre complexe non nul. Déterminer une relation entre les modules de z et z' puis une relation entre les arguments de z et z'.

2. Démontrer que les points O, M et M′ sont alignés.

3. Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul on a l'égalité : $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$.

B - Construction de l'image d'un point

On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et − 1.

On note C l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z-1| = 1$.

1. Quelle est la nature de l'ensemble C ?

2. Soit M un point de C d'affixe z, distinct du point O.

a. Démontrer que $|z'+1| = |z'|$.

Interpréter géométriquement cette égalité.

b. Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité : $|z'+1| = |z'|$, alors z vérifie l'égalité : $|z-1| = 1$?

3. Tracer l'ensemble C sur une figure. Si M est un point de C , décrire et réaliser la construction du point M′.

CORRECTION

A - Quelques propriétés

1. $|z'| = \left|\dfrac{-1}{\bar{z}}\right| = \dfrac{|-1|}{|\bar{z}|}$ or $|-1| = 1$ et $|\bar{z}| = |z|$ donc $|z'| = \dfrac{1}{|z|}$

$\arg(z') = \arg\left(\dfrac{-1}{\bar{z}}\right) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow \arg(z') = \arg(-1) - \arg(\bar{z}) + 2k\pi$

or $\arg(-1) = \pi + 2k\pi$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donc $\arg(z') = \pi + \arg(z) + 2k\pi$

2. $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ donc $\arg(z') = \pi + \arg(z) + 2k\pi$

$(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \pi + (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + 2k\pi$ donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \pi + 2k\pi$. Les points O, M et M' sont alignés.

3. $z' + 1 = -\dfrac{1}{\bar{z}} + 1 = \dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}}$ donc $\overline{z'+1} = \overline{\left(\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}}\right)} = \dfrac{\overline{\bar{z}-1}}{\bar{\bar{z}}} = \dfrac{z-1}{z}$ puisque $\bar{\bar{z}} = z$ donc $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$.

B - Construction de l'image d'un point

1. $|z-1| = 1 \Leftrightarrow |z_M - z_A| = 1 \Leftrightarrow$ AM = 1 $\Leftrightarrow$ M décrit le cercle de centre A de rayon 1

2. *a.* $\overline{z'+1} = \dfrac{1}{z}(z-1)$ donc $\left|\overline{z'+1}\right| = \left|\dfrac{1}{z}(z-1)\right| = \left|\dfrac{1}{z}\right| |z-1|$

M appartient à C donc $|z-1| = 1$ donc $\left|\overline{z'+1}\right| = \left|\dfrac{1}{z}\right|$ or $\left|\overline{z'+1}\right| = |z'+1|$ et $|z'| = \left|\dfrac{1}{z}\right|$ d'après la question A. 1.

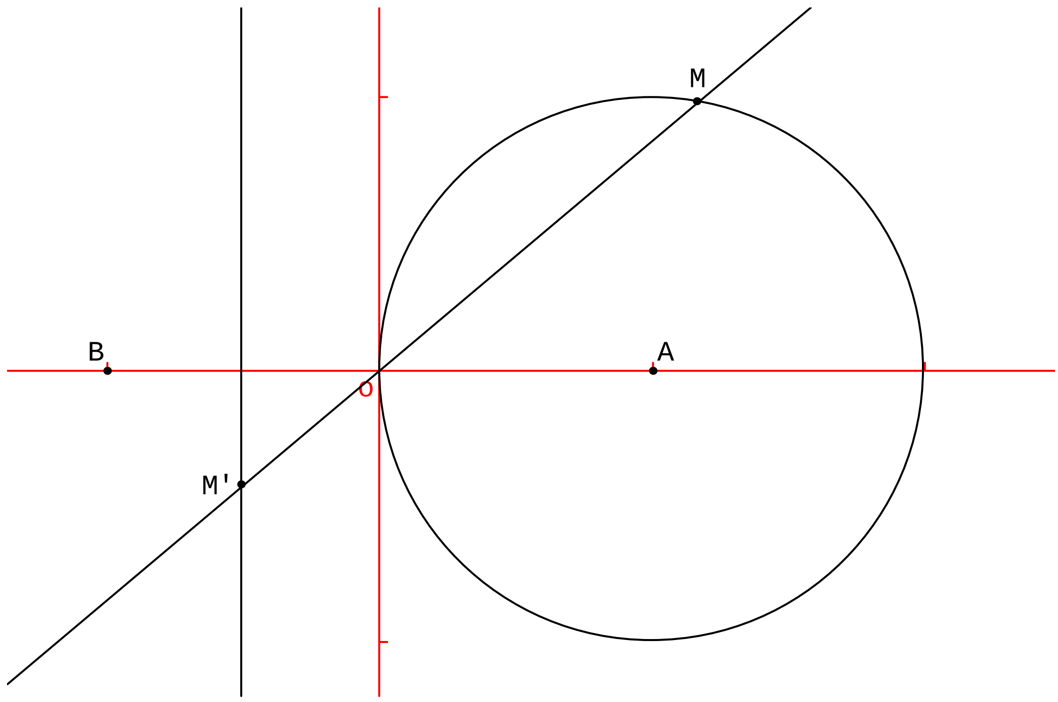
donc $|z'+1| = |z'|$ donc $|z' - (-1)| = |z'|$ soit $|z_{M'} - z_B| = |z'|$ donc BM = OM, M' appartient à la médiatrice de [OB].

b. si z' vérifie l'égalité : $|z'+1| = |z'|$, alors $|z'+1| = \left|\overline{z'+1}\right| = \left|\dfrac{1}{z}\right| |z-1| = |z'|$, or $|z'| = \left|\dfrac{1}{z}\right|$ donc $\left|\dfrac{1}{z}\right| |z-1| = \left|\dfrac{1}{z}\right|$

donc z vérifie l'égalité : $|z-1| = 1$

3. Soit M un point du cercle de centre A de rayon 1.

Le point M' appartient à la médiatrice de [OB] et à la droite (OM) (les point O, M, M' sont alignés) donc M' est le point d'intersection de ces deux droites.


M
B
A
O
M'