# La réfraction et le principe de Fermat

Ce texte vise à illustrer un des principaux outils des sciences physiques : le calcul différentiel. Contrairement à ce que ce terme "mathématique" pourrait laisser croire, il s'agit de manipuler des grandeurs tout à fait concrètes, ayant une signification physique qui doit apparaître clairement au lecteur. Les raisonnements ci-dessous sont très détaillés afin que le novice puisse suivre la démarche pas à pas, à condition de s'y consacrer pleinement. L'exemple choisi est issu du premier cours de l'UE "*Physique de la Lumière*". Il s'agit de la démonstration de la loi de la réfraction à partir du principe de Fermat qui (dans sa version la plus simple) s'énonce de la façon suivante : *"Pour aller d'un point à un autre, la lumière prend le plus court chemin"*.

## 1 Préliminaires sur les dérivées et les différentielles

La notion fondamentale de ce texte est la notion de *différentielle*, qui désigne une minuscule variation (plus rigoureusement : une variation infinitésimale, c'est à dire arbitrairement petite). A toute quantité $a$ peut être associée une différentielle $\mathrm{d}a$, qui exprime simplement le passage de la valeur $a$ à une valeur légèrement différente $a + \mathrm{d}a$. En pratique, la différentielle $\mathrm{d}a$ sera positive si la quantité $a$ augmente, négative si elle diminue, et nulle si elle ne varie pas.

Lorsque deux quantités $a$ et $b$ sont reliées entre elles, une petite variation de la première va engendrer une petite variation de la seconde. On note ceci de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Si :} \quad & a \rightarrow a + \mathrm{d}a \\ \text{alors :} \quad & b \rightarrow b + \mathrm{d}b \end{aligned}$$

Le point intéressant est que les différentielles $\mathrm{d}a$ et $\mathrm{d}b$, si elles sont suffisamment minuscules, sont *proportionnelles entre elles*. On définit alors la dérivée $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a}$, tout simplement, comme le coefficient de proportionnalité entre $\mathrm{d}b$ et $\mathrm{d}a$.

Dans la suite de ce texte, nous allons rencontrer de multiples grandeurs (des temps, des longueurs, des angles, des cosinus, des sinus, etc...) qui sont toutes reliées entre elles de diverses façons : la variation de l'une implique la variation de toutes les autres. Les différentielles correspondantes étant proportionnelles entre elles, notre travail consistera à déterminer les différents coefficients de proportionnalité, en calculant les dérivées à l'aide des formules apprises au lycée.

## 2 Quelques dérivées utiles

Pour commencer, nous nous proposons d'étudier les différentielles suivantes, dont nous aurons besoin par la suite : $\mathrm{d}(\sin\alpha)$, $\mathrm{d}(\cos\alpha)$, $\mathrm{d}(\tan\alpha)$ et $\mathrm{d}(1/\cos\alpha)$, où $\alpha$ désigne un angle mesuré en radians. Comme toutes les différentielles, ces petites variations sont définies de la façon suivante :

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Si :} & \alpha & \to & \alpha + \mathrm{d}\alpha \\
\text{alors :} & \sin\ \alpha & \to & \sin\ \alpha + \mathrm{d}(\sin\ \alpha) \\
 & \cos\ \alpha & \to & \cos\ \alpha + \mathrm{d}(\cos\ \alpha) \\
 & \tan\ \alpha & \to & \tan\ \alpha + \mathrm{d}(\tan\ \alpha) \\
 & 1/\cos\ \alpha & \to & 1/\cos\ \alpha + \mathrm{d}\,(1/\cos\ \alpha)
\end{array}$$

Pour les deux premières différentielles, les dérivées correspondantes sont connues de tous :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}(\sin\ \alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \cos\ \alpha} \tag{1}$$

Et :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}(\cos\ \alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = -\sin\ \alpha} \tag{2}$$

Pour la troisième différentielle $\mathrm{d}(\tan\alpha)$, la dérivée est moins connue, mais elle peut-être retrouvée sachant que $\tan\alpha = \frac{\sin\ \alpha}{\cos\ \alpha}$, et que la dérivée du quotient $u/v$ est donnée par la quantité suivante : $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$. Il nous faut appliquer cette formule dans le cas où la variable est $\alpha$ et où les fonctions $u$ et $v$ sont les fonctions "sinus" et "cosinus" :

$$\frac{\mathrm{d}(\tan\ \alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{(\cos\ \alpha)(\cos\ \alpha) - (\sin\ \alpha)(-\sin\ \alpha)}{\cos^2\ \alpha}$$

Sachant que $\cos^2\ \alpha + \sin^2\ \alpha = 1$ pour tout angle $\alpha$, on en déduit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}(\tan\ \alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{\cos^2\ \alpha}} \tag{3}$$

Pour la quatrième différentielle, $\mathrm{d}(1/\cos\ \alpha)$, il est pratique d'utiliser la formule des dérivées composées. On peut en effet écrire :

$$\frac{\mathrm{d}(1/\cos\ \alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}(1/\cos\ \alpha)}{\mathrm{d}(\cos\ \alpha)} \cdot \frac{\mathrm{d}(\cos\ \alpha)}{\mathrm{d}\alpha}$$

Cette relation exprime une évidence du type $\frac{C}{A} = \frac{C}{B}.\frac{B}{A}$, dans le cas particulier où $A$, $B$ et $C$ sont des différentielles minuscules : "petite variation de $\alpha$", "petite variation de $\cos\alpha$", et "petite variation de $1/\cos\alpha$". De plus, $\mathrm{d}(1/\cos\ \alpha)$ est proportionnelle à $\mathrm{d}(\cos\ \alpha)$ selon :

$$\frac{\mathrm{d}(1/\cos\ \alpha)}{\mathrm{d}(\cos\ \alpha)} = -\frac{1}{\cos^2\ \alpha}$$

Le quotient ci-dessus est obtenu en utilisant la formule de la dérivée de la fonction "inverse", et en prenant comme variable non pas $\alpha$ mais "cos $\alpha$" (remplacer "cos $\alpha$" par "u" pour s'en convaincre). Sachant que $\frac{\mathrm{d}(\cos\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = -\sin\alpha$, on en déduit la dérivée recherchée :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}(1/\cos\ \alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\sin\ \alpha}{cos^2\ \alpha}} \tag{4}$$

Les relations (1) à (4) ont été écrites sous la forme de dérivées, mais peuvent directement être utilisées pour relier les petites variations entre elles :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\sin\,\alpha) &= \cos\,\alpha\;\;\mathrm{d}\alpha \\ \mathrm{d}(\cos\,\alpha) &= -\sin\,\alpha\;\;\mathrm{d}\alpha \\ \mathrm{d}(\tan\,\alpha) &= \frac{1}{\cos^2\,\alpha}\;\;\mathrm{d}\alpha \\ \mathrm{d}(1/\cos\,\alpha) &= \frac{\sin\,\alpha}{\cos^2\,\alpha}\;\;\mathrm{d}\alpha \end{aligned}$$

# 3 Application : principe de Fermat et loi de Descartes

Pour montrer comment le calcul différentiel s'applique à l'étude de situations physiques, nous nous intéressons à la démonstration la loi de *Snell-Descartes*, qui relie l'angle d'incidence $i_1$ et l'angle de réfraction $i_2$ lorsqu'un rayon lumineux traverse une interface entre deux milieux :

$$n_1\,\sin\,i_1 = n_2\,\sin\,i_2,$$

Les angles sont mesurés par rapport à la normale à l'interface, et $n_1$ et $n_2$ désignent les indices optiques des deux milieux. La vitesse de la lumière vaut $c/n_1$ dans le premier milieu et $c/n_2$ dans le second, $c$ désignant la vitesse de la lumière dans le vide.

La loi de Descartes découle du principe de Fermat qui, dans sa version simplifiée, s'énonce comme suit : "pour aller d'un point à un autre, la lumière suit le plus court chemin". Pour le montrer, on doit imaginer un point de départ $A$ dans le premier milieu $n_1$, un point d'arrivée $B$ dans le second, ainsi qu'un point d'impact $M$ situé à l'interface, comme indiqué sur la figure 1. La lumière commence par parcourir le segment $AM$ avec un temps de trajet $t_1$, puis le segment $MB$ avec un temps de trajet $t_2$ ; le temps de trajet total $t$ est égal à la somme $t_1 + t_2$.

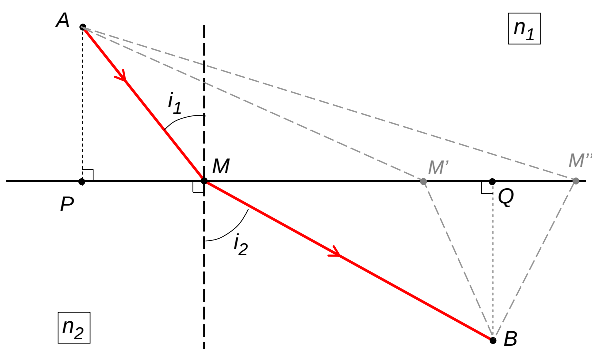


FIGURE 1 – Réfraction d'un rayon lumineux à une interface : le rayon emprunte le trajet le plus court, passant par $M$, et pas les trajets plus longs comme ceux passant par $M'$ ou $M''$.

On se doute bien que ce temps de trajet dépend du point d'impact $M$ : lorsque $M$ prend diverses positions entre $P$ et $Q$, une diminution de $t_1$ s'accompagne d'une augmentation de $t_2$. On s'attend à un minimum du temps de trajet pour une position de $M$ intermédiaire, correspondant à un compromis où à la fois $t_1$ et $t_2$ sont relativement courts (Fig. 1). La question que l'on se pose est la suivante : *comment trouver la bonne position de $M$, c'est à dire celle pour laquelle le temps de trajet est minimal ?*. Pour y répondre, il est nécessaire de poser le problème de façon quantitative.

# 4 Position du problème

"Poser un problème" consiste à introduire des notations précises pour les différentes grandeurs, souvent à l'aide d'un dessin, afin de permettre des raisonnements quantitatifs. La première chose à définir est la position du point $M$, qui peut être répérée par la distance $PM$ : comme il s'agit d'une distance horizontale que l'on peut faire varier, nous choisissons d'appeller cette distance $x$ (Fig. 2a).

Il est également nécessaire de définir les grandeurs géométriques qui caractérisent la situation physique, c'est à dire la position des points $A$ et $B$. Pour cela :

- On note $h_1$ la distance entre l'interface et le point $A$.
- On note $h_2$ la distance entre l'interface et le point $B$.
- On note $L$ la distance entre les points $P$ et $Q$ (la distance $MQ$ est alors donnée par $L-x$).

Ainsi, $x = 0$ correspond à la situation où $M$ est au point $P$, et $x = L$ correspond à la situation où $M$ est au point $Q$. Il est important de définir sur le dessin l'angle d'incidence $i_1$ et l'angle de réfraction $i_2$, pris par rapport à la normale à l'interface au point $M$. Il est aussi utile, pour les raisonnements de trigonométrie ultérieurs, de reporter ces angles aux points $A$ et $B$.

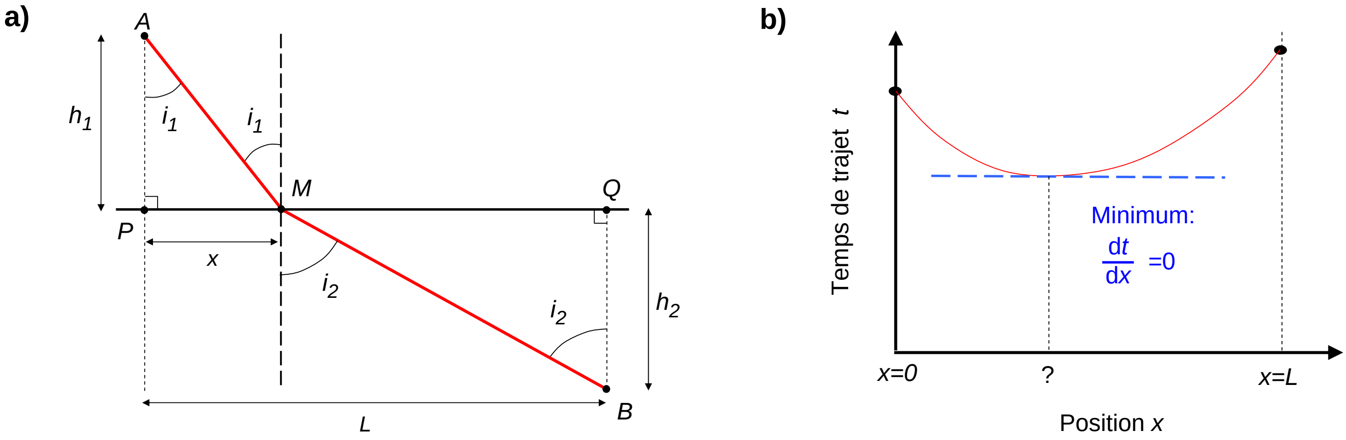


FIGURE 2 – a) Définitions. b) Allure du temps de trajet $t$ mis par le rayon lumineux pour aller de $A$ à $B$, en fonction de la position $x$.

Grâce à ces notations, on peut définir la question posée plus précisément : si l'on trace le temps de trajet $t$ en fonction de $x$, on obtiendra une courbe décroissante puis croissante, avec un minimum pour une certaine valeur de $x$ (Fig. 2b). En ce point particulier, la tangente à la courbe $t(x)$ est horizontale, ce qui correspond à une dérivée $\frac{dt}{dx} = 0$. *Le problème se ramène donc à la question suivante : à quelle condition la dérivée $\frac{dt}{dx}$ est-elle nulle ?* Attention : pour nous, les quantités $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}x$ ont une signification physique concrète : si la position passe de $x$ à $x + \mathrm{d}x$, cela correspond à un changement de trajectoire des rayons lumineux ; le temps de trajet qui en résulte passe alors de la valeur $t$ à la valeur $t + \mathrm{d}t$.

Pour déterminer d$t$, il nous faudra étudier de façon détaillée tout ce qui varie lorsqu'on passe de $x$ à $x + \mathrm{d}x$. Le bilan est assez rapide : lorsque $x$ varie, l'angle $i_1$ varie, ainsi que $i_2$. Le temps de trajet $t_1$ pour le premier rayon varie également, ainsi que $t_2$. Ces différentes quantités sont appelées des *variables*, variables auxquelles on peut associer des différentielles définies de la façon usuelle :

$$\begin{array}{rrcl}
\text{Si :} & x & \to & x + \mathrm{d}x \\
\text{alors :} & i_1 & \to & i_1 + \mathrm{d}i_1 \\
 & i_2 & \to & i_2 + \mathrm{d}i_2 \\
 & t_1 & \to & t_1 + \mathrm{d}t_1 \\
 & t_2 & \to & t_2 + \mathrm{d}t_2 \\
 & t & \to & t + \mathrm{d}t
\end{array}$$

On définit de la même façon les différentielles d(sin $i_1$), d(tan $i_1$), d(sin $i_2$), et d'autres encore, qui sont reliées à d$i_1$ et d$i_2$ comme calculé dans la section 2.

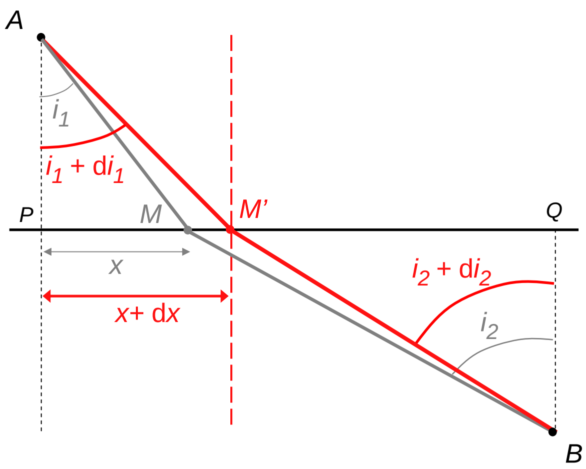


FIGURE 3 – Définition graphique des différentielles d$x$, d$i_1$, et d$i_2$. d$x$ est la petite distance entre $M$ et $M'$, et $di_1$ est le petit angle entre les rayons partant de A. Par contre, $di_2$ est une quantité négative : $di_2$ est donnée par l'opposée du petit angle entre les rayons arrivant en B.

La figure 3 illustre ces définitions en comparant les trajets passant par deux points proches $M$ et $M'$ ; pour la clarté du dessin nous n'avons reporté les angles qu'aux points A et B. Notons qu'une augmentation de $x$ fait diminuer $i_2$ : la différentielle d$i_2$ est donc négative lorsque d$x$ est positive. Ces différentielles étant proportionnelles entre elles, le problème sera résolu lorsqu'on aura exprimé toutes ces différentielles en fonction de la différentielle $dx$.

Après avoir fait le bilan de ce qui varie, il est important d'énumérer ce qui ne varie pas : les grandeurs géométriques $h_1$, $h_2$ et $L$, qui définissent les points A et B, la vitesse de la lumière $c$, ainsi que les indices $n_1$ et $n_2$. Ces quantités constantes sont appelées des *paramètres* du problème, par opposition aux variables définies précemment. Notre objectif est ici de calculer la différentielle d$t$ (en ayant précédemment déterminé les petites variations d$i_1$, d$i_2$, d$t_1$ et d$t_2$) en fonction de la différentielle d$x$ et des paramètres du problème. Ensuite, nous chercherons la condition permettant d'obtenir $\frac{dt}{dx} = 0$.

# 5 Calcul des différentielles des angles

Pour pouvoir relier $\mathrm{d}i_1$ à $\mathrm{d}x$, il faut partir d'une relation entre $x$ et $i_1$, de préférence une relation exprimée de façon simple et ne faisant intervenir aucune autre variable, afin de ne pas alourdir les calculs. En utilisant le triangle rectangle $APM$, nous remarquons que :

$$x = h_1 \tan i_1,$$

relation qui ne fait intervenir que $i_1$ et le paramètre constant $h_1$. De cette équation nous déduisons la relation correspondante entre les différentielles :

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}(h_1 \tan i_1)$$

Cette relation exprime une évidence : si $x$ est toujours égal à $h_1 \tan i_1$, alors une variation de la première quantité implique une variation égale de la seconde.

Nous pouvons poursuivre le calcul en faisant sortir la constante $h_1$ de la différentielle, et en exprimant $\mathrm{d}(\tan i_1)$ en fonction de $\mathrm{d}i_1$ (Eq. 3) :

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}(h_1 \tan i_1) = h_1 \, \mathrm{d}(\tan i_1) = \frac{h_1}{\cos^2 i_1} \, \mathrm{d}i_1$$

Nous en déduisons finalement la différentielle de l'angle $i_1$

$$\boxed{\mathrm{d}i_1 = \frac{\cos^2 i_1}{h_1} \, \mathrm{d}x} \qquad (5)$$

Le raisonnement pour la différentielle $\mathrm{d}i_2$ est très similaire : il nous faut partir d'une relation simple entre $x$ et $i_2$, en étudiant le triangle $BQM$ :

$$L - x = h_2 \tan i_2,$$

d'ou l'on déduit :

$$\mathrm{d}(L - x) = \mathrm{d}(h_2 \tan i_2).$$

Le terme de gauche se calcule très facilement : $\mathrm{d}(L - x) = \mathrm{d}L - \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x$ puisque L ne varie pas. On obtient :

$$-\mathrm{d}x = \frac{h_2}{\cos^2 i_2} \, \mathrm{d}i_2,$$

et finalement :

$$\boxed{\mathrm{d}i_2 = -\frac{\cos^2 i_2}{h_2} \, \mathrm{d}x} \qquad (6)$$

On peut vérifier que les signes de ces différentielles correspondent bien à notre intuition physique : si $\mathrm{d}x$ est positive, $\mathrm{d}i_1$ est effectivement positive et $\mathrm{d}i_2$ est bien négative.

# 6 Différentielle du temps de trajet - conclusion

Pour ce calcul, on commence par chercher une relation entre le premier temps de trajet $t_1$ et une variable déjà étudiée, par exemple $i_1$ ou $x$. On remarque tout d'abord que la longueur

$AM$ vaut $h_1/\cos\, i_1$. La vitesse de la lumière $v_1$ dans ce milieu valant $v_1 = c/n_1$, on en déduit une expression du temps de trajet en fonction de $i_1$ et des paramètres du problème :

$$t_1 = \frac{AM}{v_1} = \frac{n_1}{c}\frac{h_1}{\cos\, i_1},$$

d'ou l'on déduit la différentielle $\mathrm{d}t_1$ :

$$\mathrm{d}t_1 = \mathrm{d}\left(\frac{n_1}{c}\frac{h_1}{\cos\, i_1}\right) = \frac{n_1 h_1}{c}\,\mathrm{d}(1/\cos\, i_1) = \frac{n_1 h_1}{c}\frac{\sin\; i_1}{cos^2\, i_1}\,\mathrm{d}i_1,$$

Pour calculer la dernière différentielle nous avons bien sûr utilisé la relation (4). Cette expression de $\mathrm{d}t_1$ est un peu lourde, mais si l'on se rappelle que $\mathrm{d}i_1 = \frac{\cos^2 i_1}{h_1}\mathrm{d}x$ (Eq. 5), on obtient la relation simple suivante :

$$\boxed{\mathrm{d}t_1 = \frac{n_1\; \sin\; i_1}{c}\,\mathrm{d}x} \tag{7}$$

Un raisonnement tout à fait similaire permet de montrer que :

$$t_2 = \frac{n_2}{c}\frac{h_2}{\cos\, i_2},$$

d'où l'on déduit :

$$\mathrm{d}t_2 = \frac{n_2 h_2}{c}\frac{\sin\; i_2}{\cos^2\; i_2}\,\mathrm{d}i_2,$$

et enfin, à l'aide de la relation (6) :

$$\boxed{\mathrm{d}t_2 = -\frac{n_2\; \sin\; i_2}{c}\,\mathrm{d}x} \tag{8}$$

On retrouve bien le fait que, si $x$ augmente, le temps de trajet $t_1$ augmente alors que le temps de trajet $t_2$ diminue.

Nous sommes maintenant capable de conclure quant à la loi de la réfraction. Etant donné que le temps de trajet total s'écrit $t = t_1 + t_2$, la différentielle correspondante s'écrit $\mathrm{d}t = \mathrm{d}t_1 + \mathrm{d}t_2$, qui peut donc être exprimée de façon simple en fonction de $\mathrm{d}x$ :

$$\boxed{\mathrm{d}t = \frac{n_1\; \sin\; i_1\; -\; n_2\; \sin\; i_2}{c}\,\mathrm{d}x} \tag{9}$$

La quantité $\frac{dt}{dx}$ a donc été déterminée en évitant le fastidieux calcul de $t(x)$ et de sa dérivée. On en déduit de façon immédiate la loi de Descartes à partir du principe de Fermat. Parmi tous les trajets possibles, le trajet pour lequel le temps de trajet $t$ est minimal est celui vérifiant $\frac{dt}{dx} = 0$, c'est à dire :

$$\boxed{n_1\; \sin\; i_1\; =\; n_2\; \sin\; i_2} \tag{10}$$