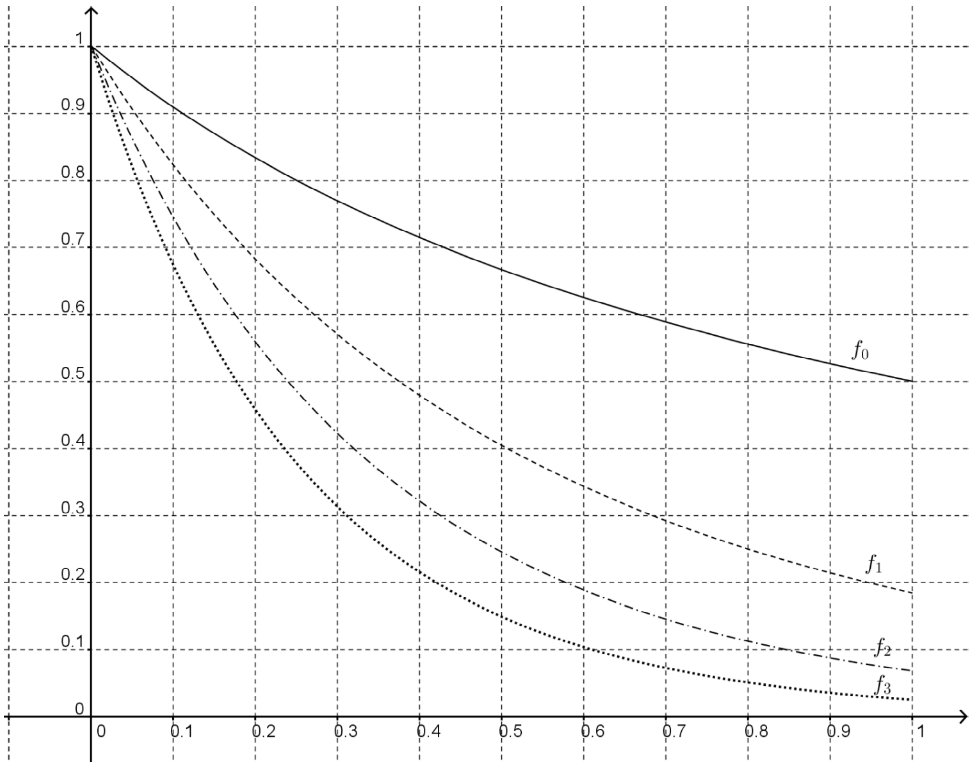
Pondichéry avril 2012

On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\,dx$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle [0 ; 1] par $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$ pour différentes valeurs de n.



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.
b. Démontrer cette conjecture.

2. ***a.*** Montrer que pour tout entier $n > 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 1] : $0 \leq \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leq \frac{e^{-nx}}{1+x} \leq e^{-nx}$

b. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3. ***a.*** Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $n \geq 1$: $I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right)$

L'intégration par parties ne figure plus au nouveau programme donc la question 3. a. peut être remplacée par :

3. ***a.*** Dériver la fonction h définie sur [0 ; 1] par : $h(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$. Exprimer $\int_0^1 h'(x)\,dx$ à l'aide de I_n et J_n.

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$: $I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right)$

b. En déduire $\lim_{n \to +\infty} n I_n$

CORRECTION

1. *a.* I_n est l'aire comprise entre la courbe f_n, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$
Etant donné la position relative des courbes, $I_0 > I_1 > I_2 > I_3$. La suite semble être décroissante.

b. $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{e^{-(n+1)x}}{1+x} - \dfrac{e^{-nx}}{1+x} = \dfrac{e^{-nx}(e^{-x}-1)}{1+x}$

$x \in [0 ; 1]$ donc $-x \le 0$ donc $e^{-x} \le 1$ donc $e^{-x} - 1 \le 0$, de plus la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et $1 + x \ge 0$ sur $[0 ; 1]$ donc $\dfrac{e^{-nx}(e^{-x}-1)}{1+x} \le 0$ donc sur $[0 ; 1]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \le 0$.

Les fonctions f_n, f_{n+1} sont continues sur $[0 ; 1]$ et $0 \le 1$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+x}\,dx \le \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx$ soit $I_{n+1} \le I_n$ donc la suite (I_n) est décroissante.

2. *a.* $0 \le x \le 1$ donc $1 \le 1 + x$ donc $1 \le 1 + x \le (1 + x)^2$ donc $0 \le \dfrac{1}{(1+x)^2} \le \dfrac{1}{1+x} \le 1$

la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc en multipliant les termes de l'inégalité précédente par e^{-nx}, on a pour tout entier $n > 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$: $0 \le \dfrac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \le \dfrac{e^{-nx}}{1+x} \le e^{-nx}$

b. Les fonctions f_n et $x \to \dfrac{e^{-nx}}{(1+x)^2}$ et $x \to e^{-nx}$ sont continues sur $[0 ; 1]$ et $0 \le 1$ donc :

$0 \le \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\,dx \le \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx \le \int_0^1 e^{-nx}\,dx$ soit $0 \le J_n \le I_n \le \left[-\dfrac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1$ soit $0 \le J_n \le I_n \le \dfrac{1}{n}(1 - e^{-1})$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}(1 - e^{-1}) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

3. *a.* Soit $\begin{cases} u'(x) = e^{-nx} & u(x) = -\dfrac{1}{n}e^{-nx} \\ v(x) = \dfrac{1}{1+x} & v'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} \end{cases}$ donc $I_n = \left[-\dfrac{1}{n}e^{-nx} \times \dfrac{1}{1+x}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{n}e^{-nx} \times \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$

$I_n = \left[-\dfrac{1}{n}e^{-n} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right] - \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\,dx$

$I_n = \dfrac{1}{n}\left(-\dfrac{e^{-n}}{2} + 1\right) - \dfrac{1}{n}J_n$ donc pour tout entier $n \ge 1$: $I_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{e^{-n}}{2} - J_n\right)$

3. a. modifiée

3. *a.* $\begin{cases} u'(x) = e^{-nx} & u(x) = -n\,e^{-nx} \\ v(x) = 1 + x & v'(x) = 1 \end{cases}$ donc $h'(x) = \dfrac{-n(1+x)e^{-nx} - e^{-nx}}{(1+x)^2} = \dfrac{-n(1+x)e^{-nx}}{(1+x)^2} - \dfrac{e^{-nx}}{(1+x)^2}$

donc $h'(x) = \dfrac{-n\,e^{-nx}}{(1+x)} - \dfrac{e^{-nx}}{(1+x)^2}$

$\displaystyle\int_0^1 h'(x)\,dx = \int_0^1 \left(-n\frac{e^{-nx}}{(1+x)} - \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\right)dx = -n\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\,dx.$

or $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\,dx$ donc $\displaystyle\int_0^1 h'(x)\,dx = -n\,I_n - J_n$

$\displaystyle\int_0^1 h'(x)\,dx = h(1) - h(0) = \frac{e^{-n}}{2} - \frac{1}{1} = -1 + \frac{e^{-2}}{2}$ donc $n\,I_n + J_n = 1 - \dfrac{e^{-2}}{2}$

donc $n\,I_n = 1 - \dfrac{e^{-2}}{2} - J_n$ donc $I_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{e^{-n}}{2} - J_n\right)$

b. $n\,I_n = 1 - \dfrac{e^{-n}}{2} - J_n$ or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}}{2} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,I_n = 1$