**T ES cours : La convexité**

 

La courbe d’une fonction convexe est située au dessus des tangentes.

 

La courbe d’une fonction concave est située en dessous des tangentes.

**II. Convexité et dérivation**

La convexité de la fonction est liée à la **position** **des** **tangentes** par rapport à la courbe de la fonction, alors la convexité de la fonction est liée à la **dérivée de la fonction**, mieux encore à **aux variations de cette dérivée.**

1. **Les propriétés**

**Propriété 1: convexité et variations de la dérivée.**

• La fonction f est convexe sur un intervalle I si et seulement si sa dérivée est croissante sur I.

• La fonction f est concave sur un intervalle I si et seulement si sa dérivée est décroissante sur I.

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que f ' est dérivable sur I

Et f ‘‘, dite *f seconde*, désigne la dérivée de f ‘ sur I, alors la propriété 1 se traduit par :

**Propriété 2 : Convexité et signe de la dérivée seconde**

• La fonction f est **convexe** sur I si et seulement si f ’’(*x*) > 0 pour tout *x* de I.

• La fonction f est **concave** sur I si et seulement si f ’’(*x*) < 0 pour tout *x* de I.

1. **Point d’inflexion.**

Définition :

On appelle point d'inflexion un point où la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente.

Et il y a un changement de convexité.

Sur le graphique ci dessous,

le point d’inflexion est O(0 ;0). Ici le point d’inflexion est B(2 ; -4)



**Propriété 3 :**

 Soit f une fonction deux fois dérivable, c’est à dire f ' existe et est dérivable sur un intervalle I.

La courbe représentative de f admet un point d'inflexion A ( a ; f(a) )

si et seulement si f ' ' s'annule en a, c’est à dire si et seulement si f ’’( a) = 0.

**EXERCICE D’APPLICATION :**

F(x) = x3 + 2 est définie sur IR.

1. Calculer sa dérivée F ‘et sa dérivée seconde F ‘ ‘.
2. Déterminer le signe de F’’.
3. En déduire la convexité de F.
4. La courbe de F admet-elle un point d’inflexion ? Quelles sont ses coordonnées ?
5. F ’(x) = 3x 2

ATTENTION !
Il FAUDRA ETUDIER LE SIGNE DE F ‘ ‘ EN FACTORISANT L’EXPRESSION et en utilisant un tableau des signes…

F ‘ ‘ (x) = 3. 2x = 6x.

1. **Etudions le signe de F ‘’(x) .**

F’’(x) s’annule pour x = 0 (car 6x = 0 pour x = 0)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | -∞ | 0 |  +∞ |
| F ‘ ‘(x) | \_ | + |

Sur ] 0 ; +∞[, F ‘ ‘ (x) est strictement positive, donc F est convexe sur cet intervalle.

Sur ] -∞ ; 0 [, F ‘ ‘ (x) est strictement négative, donc F est concave sur cet intervalle.

Cela signifie que :

Sur ] 0 ; +∞ [ la courbe représentative de f se trouve au dessus de ses tangentes.

Sur ] -∞ ; 0 [,la courbe représentative de f se trouve en dessous de ses tangentes.

4) Résolvons fF‘ ‘ (x) = 0
 6x = 0
 x = 0

La dérivée seconde s’annule pour x = 0, Donc la courbe représentative de f admet un point d’inflexion
d’abscisse a = 0.
son ordonnée est f(a) = f(0) = 0^3 + 2 = 2.

 CCL : Le point d’inflexion a pour coordonnées ( 0 ; 2 )

**EXERCICE D’APPLICATION :**

F(x) = x3 + 2 est définie sur IR.

1. Calculer sa dérivée F ‘et sa dérivée seconde F ‘ ‘.
2. Déterminer le signe de F’’.
3. En déduire la convexité de F.
4. La courbe de F admet-elle un point d’inflexion ? Quelles sont ses coordonnées ?

**EXERCICE D’APPLICATION :**

F(x) = x3 + 2 est définie sur IR.

1. Calculer sa dérivée F ‘et sa dérivée seconde F ‘ ‘.
2. Déterminer le signe de F’’.
3. En déduire la convexité de F.
4. La courbe de F admet-elle un point d’inflexion ? Quelles sont ses coordonnées ?

**EXERCICE D’APPLICATION :**

F(x) = x3 + 2 est définie sur IR.

1. Calculer sa dérivée F ‘et sa dérivée seconde F ‘ ‘.
2. Déterminer le signe de F’’.
3. En déduire la convexité de F.
4. La courbe de F admet-elle un point d’inflexion ? Quelles sont ses coordonnées ?

**EXERCICE D’APPLICATION :**

F(x) = x3 + 2 est définie sur IR.

1. Calculer sa dérivée F ‘et sa dérivée seconde F ‘ ‘.
2. Déterminer le signe de F’’.
3. En déduire la convexité de F.
4. La courbe de F admet-elle un point d’inflexion ? Quelles sont ses coordonnées ?

**EXERCICE D’APPLICATION :**

F(x) = x3 + 2 est définie sur IR.

1. Calculer sa dérivée F ‘et sa dérivée seconde F ‘ ‘.
2. Déterminer le signe de F’’.
3. En déduire la convexité de F.
4. La courbe de F admet-elle un point d’inflexion ? Quelles sont ses coordonnées ?

CORRECTION :

1) F’(x) = 3x2

F’’(x) = 3 . 2x = 6 x

2) Valeur qui annule : 6x = 0 ⬄ x = 0

Dressons le tableau des signes de F ‘ ‘ (x) :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | - inf | 0 | +inf |
| F ‘’ (x)= 6x | \_ | + |

F(0) = 03 + 2 = 2

Ses coordonnées sont ( 0 ; f(0) ) = ( 0 ; 2)