Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.
Un individu sain est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.
Un individu malade est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.
Un individu guéri est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri. Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.
Les premières observations nous montrent que, d'un jour au jour suivant

- 5 % des individus tombent malades;
- 20 % des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience.
On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est à dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.

2. *a.* Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ? En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.

b. Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

On admet que $c_{n+1} = 0{,}2\, b_n + c_n$

Pour tout entier naturel n, on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On définit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

3. *a.* Vérifier que, pour tout entier naturel n,

$$U_{n+1} = A \times U_n.$$

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On admet que

$$A^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n) & 0{,}8^n & 0 \\ \frac{1}{3}(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n) & 1 - 0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}$$

4. *a.* Vérifier que pour tout entier naturel n,

$$b_n = \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n)$$

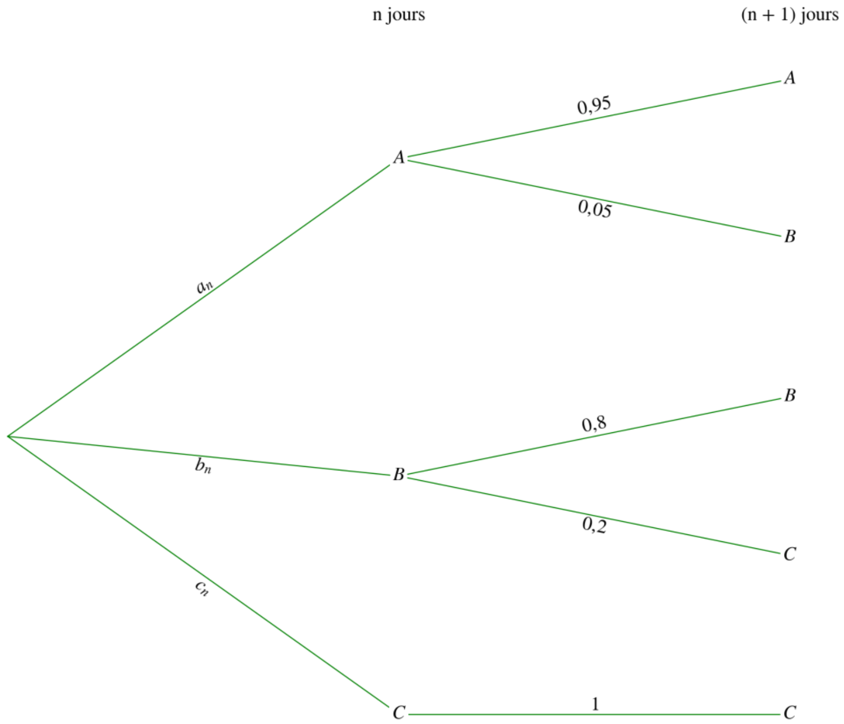
b. Déterminer la limite de la suite (b_n).

c. On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroît.
On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum. À cet effet, on utilise l'algorithme donné en annexe 2 (à rendre avec la copie), dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).
Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau ci-dessous.
Conclure.

```
Variables         b, b', x, y sont des réels
                  k est un entier naturel
                  n est un entier
Initialisation.   Affecter à b la valeur 0
                  Affecter à b' la valeur 0,05
                  Affecter à k la valeur 0
                  Affecter à x la valeur 0,95
                  Affecter à y la valeur 0,8
Traitement        Tant que b < b' faire
                     | Affecter à k la valeur k + 1
                     | Affecter à b la valeur b'
                     | Affecter à x la valeur 0,95 x
                     | Affecter à y la valeur 0,80 y
                     | Affecter à b' la valeur ......
                  Fin Tant que
Sortie            Afficher .…...
```

	k	b	x	y	b'	Test: $b < b'$?
Après le 7e passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8e passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9e passage éventuel dans la boucle Tant que						

CORRECTION



1. $a_1 = 0{,}95\, a_0 = 0{,}95$ et $b_1 = 0{,}05\, a_0 = 0{,}05$ et $c_1 = 0$

2. *a.* la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant est de 95 % donc $a_{n+1} = 0{,}95\, a_n$

b. $b_{n+1} = 0{,}05\, a_n + 0{,}8\, b_n$ et $c_{n+1} = 0{,}2\, b_n + c_n$

3. *a.* pour tout entier naturel n, $A \times U_n = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95\, a_n \\ 0{,}05\, a_n + 0{,}8\, b_n \\ 0{,}2\, b_n + c_n \end{pmatrix}$ donc $A \times U_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$

donc $U_{n+1} = A \times U_n$.

b. **Initialisation :** $D^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 0{,}95^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $D^0 = \begin{pmatrix} 0{,}95^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Hérédité : montrons que pour tout entier naturel n, si $D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $D^{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$D^{n+1} = D^n \times D = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D^{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}95^n \times 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n \times 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La propriété est héréditaire.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. *a.* $U_n = A^n \times U_0$ avec $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n) & 0{,}8^n & 0 \\ \frac{1}{3}(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n) & 1 - 0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $U_n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n \\ \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n) \\ \frac{1}{3}(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n) \end{pmatrix}$

$$U_n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n \\ \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n) \\ \frac{1}{3}(3 - 4\times 0{,}95^n + 0{,}8^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$ donc pour tout entier naturel n : $b_n = \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n)$

b. Pour tout entier naturel n : $b_n = \frac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n)$

$-1 < 0{,}95 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}95^n = 0$, de même $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

c. On veut tester si $b_n < b_{n+1}$ (donc si la maladie se développe) donc b de l'algorithme correspond à b_n et b' à b_{n+1}

	k	b	x	y	b'
Initialisation	0	0	0,95	0,80	0,05
Après le 1e passage dans la boucle Tant que	1	0,05	$0{,}95 \times 0{,}95 = 0{,}95^2$	$0{,}80 \times 0{,}80 = 0{,}80^2$	$\frac{1}{3}(x-y)$

Il faut donc compléter l'algorithme :

```
Variables           b, b', x, y sont des réels
                    k est un entier naturel
                    n est un entier
Initialisation.     Affecter à n la valeur 0
                    Affecter à b' la valeur 0,05
                    Affecter à k la valeur 0
                    Affecter à x la valeur 0,95
                    Affecter à y la valeur 0,8
Traitement          Tant que b < b' faire
                      | Affecter à k la valeur k + 1
                      | Affecter à b la valeur b'
                      | Affecter à x la valeur 0,95 x
                      | Affecter à y la valeur 0,80 y
                      | Affecter à b' la valeur 1/3 (x – y)
                    Fin Tant que
Sortie              Afficher k
```

	k	b	x	y	b'	Test: $b < b'$?
Après le 7e passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8e passage éventuel dans la boucle Tant que	8	0,1652	0,6302	0,1342	0,1653	VRAI
Après le 9e passage éventuel dans la boucle Tant que	9	0,1653	0,5987	0,1074	0,1638	FAUX

L'algorithme affiche 9 ($b_9 > b_{10}$) le pic épidémique survient le 9e jour.